Autorizzazione N. 399 del Tribunale di Cagliari in data 23-4-1980
Proprietà ed Amministrazione: **C.R.S.E.M. - CAGLIARI**

La presente Rivista viene stampata con un contributo finanziario del Consiglio Nazionale delle Ricerche.



# LE POSSIBILI ORIGINI GEOMETRICHE DEL PRINCIPIO DELLA SEMISOMMA E SEMIDIFFERENZA DELLE INCOGNITE IN USO PRESSO I BABILONESI E SUE APPLICAZIONI

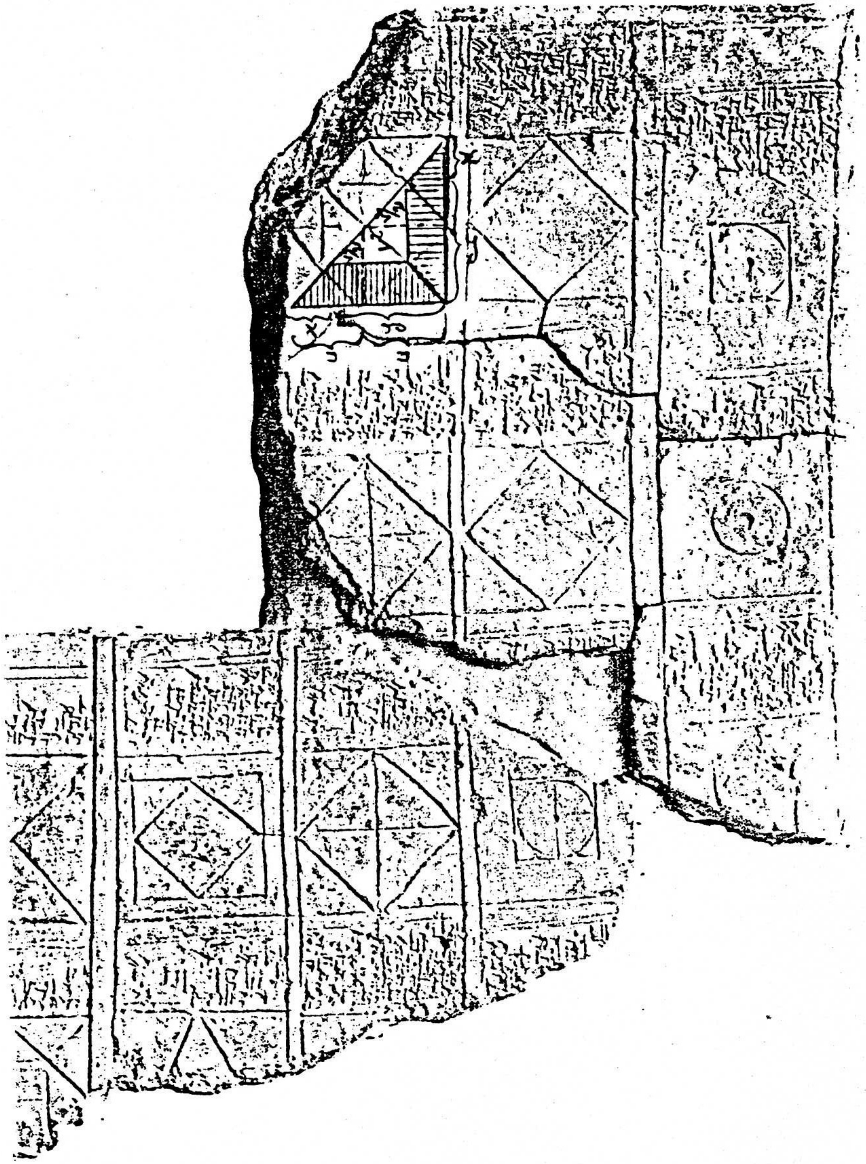
**Aldo BONET**
VIA GUARDINI, 6 - 38100 TRENTO - ITALIA
aldo@storiadellamatematica.it
tel-fax 0461827658

*RIASSUNTO. Viene proposto uno studio geometrico che sta alla base del principio della semisomma e semidifferenza in uso presso i Babilonesi. Vengono poi sviluppati dei diagrammi conseguenti allo studio geometrico suddetto e applicati a dimostrazione dei procedimenti algebrici di problemi noti, esposti nelle tavolette babilonesi rinvenute. Lo studio geometrico della semisomma e semidifferenza viene di conseguenza sviluppato per i sistemi di equazioni di 3° grado giungendo alla costruzione geometrica ipotizzata da SS.J. Lurje (per il noto studio della somma dei quadrati). Infine si espone, sotto forma di proposta gli insegnanti, la trattazione dell'argomento dal punto di vista didattico.*

I documenti da cui possiamo trarre le nostre conoscenze circa la civiltà Babilonese sono le tavolette d'argilla con iscrizioni a caratteri cuneiformi.

Le tavolette pervenutici[1] mostrano che i babilonesi erano in grado di risolvere problemi che noi traduciamo nei seguenti tipi di equazioni: equazioni di primo grado, equazioni di secondo grado, particolari equazioni

(1) Quelle a contenuto matematico sono circa 300: alcune risalgono al periodo sumerico (3000-2100 a.C.), altre, un gruppo più ampio, al periodo che va dall'epoca di Hammurabi fino al 1500 a.C. ed altre ancora risalgono al nuovo impero babilonese e al periodo seleucide (600-300 a.C.).
I maggiori contributi allo studio di queste tavolette si devono a O. Neugebauer, a F. Thureau-Dangin e a E.M. Bruins.



**Tavoletta Babilonese del 1800 a.C. in cui si propongono dei problemi sul quadrato.**



di terzo grado, equazioni di grado superiore ma riconducibili a quelle di secondo e terzo.

le soluzioni sono sempre riferite ad un caso particolare; non compaiono né formule né teoremi sebbene sembri fuori di dubbio che i Babilonesi conoscessero regole generali di calcolo.

Nella tavoletta BM 1390(2) che risale all'inizio del II millennio a.C. vi sono, come è noto, ventiquattro problemi che si possono classificare in tre gruppi.

I primi due gruppi forniscono un insegnamento di base che consiste in due metodi di risoluzione, quello del completamento del quadrato nel caso dell'equazione quadratica e quello della semisomma e semidifferenza delle incognite nel caso del sistema; sostanzialmente il primo metodo potrebbe apparire dalla applicazione del secondo.

La semisomma e la semidifferenza delle radici giocano un ruolo di incognite ausiliare (o subradici) e permettono di ottenere simultaneamente le due radici.

Se pur ampiamente applicato dai babilonesi, la dimostrazione del principio che regola la semisomma e la semidifferenza delle radici non è riportata in alcun documento o tavoletta finora rinvenuti, né di conseguenza, quella delle identità algebriche ampiamente sfruttate nei testi matematici babilonesi.

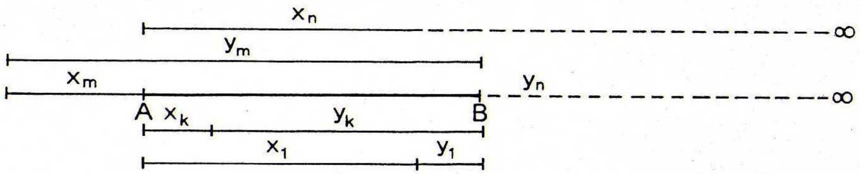
Quello che ora viene qui di seguito esposto è il principio suddetto che stava probabilmente alla base della teoria babilonese delle equazioni algebriche.

La teoria potrebbe aver preso il suo principale fondamento dalla osservazione di una grandezza generica rappresentata da un segmento di ampiezza supposta nota e sul quale, allo scopo di determinare le grandezze incognite componenti, col solo uso della riga e del compasso (strumenti già in uso presso i babilonesi), avrebbero stabilito così il principio che regola la semisomma e la semidifferenza delle incognite, indispensabile e sorprendentemente a carattere comune per gli sviluppi successivi dei sistemi di equazioni.

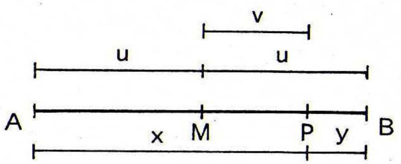
Un segmento di ampiezza supposta nota, lo si può sempre interpretare come il risultato di una somma o differenza di «*n*» grandezze incognite.

(2) Caveing, 1982, I, pp. 91-95.

Per dimostrare quanto suddetto, procediamo riferendoci al caso in cui il segmento sia composto da due sole grandezze incognite $(x, y)$; si può osservare come il segmento, in questo caso, sia il risultato di infinite combinazioni per composizione mediante due grandezze e quindi avere infinite soluzioni.




Vediamo ora come si può determinare il valore di una coppia di grandezze presa a piacere:




Le grandezze (o radici) stabilite sono le incognite $(x, y)$ dove «$p$» è un punto sul segmento che le distingue.

Come si può osservare, le grandezze $(x, y)$ possono essere a loro volta scomposte in altre due sottograndezze fondamentali (o subradici) che per nostra comodità chiameremo: «$u, v$» e precisamente:

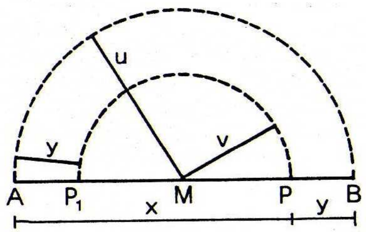
$$x = u + v; \; y = u - v,$$

dove «$M$» è il punto di mezzo del segmento.

Si constata che determinare $(x, y)$ equivale a determinare $(u, v)$.

La subradice «$u$» è già nota poiché è la metà del segmento $AB = x + y$, ovvero è la semisomma delle incognite $(x, y)$, il problema resta dunque, quello di determinare la sottograndezza o subradice mancante «$v$». A questo proposito si osserva quanto segue:






Traslando o ribaltando l'incognita $y$ di 180° gradi sul medesimo segmento $AB$ facendo centro con un compasso nel punto di mezzo «$M$», si formano così due semicerchi(3) di diametro rispettivamente pari a $2u = x + y$ e $2v = x - y$, ovvero «$v$» è la semidifferenza tra i segmenti $AP$ e $AP_1$; quindi $v = (x - y) : 2$.

Si deduce che:

A) La risoluzione elementare del problema preposto, la si può ottenere ammettendo nota accanto alla somma delle due grandezze incognite $(x, y)$, come condizione necessaria e sufficiente, anche la loro differenza o viceversa.

Viene fatto pertanto, usando un nostro concetto algebrico: «Un sistema», cioé:

(1) $$x + y = c; \; x - y = d$$

che viene risolto con il principio osservato e stabilito della semisomma e della semidifferenza, cioé:

$$x, y = u \pm v; \; x, y = c/2 \pm d/2.$$

---

(3) Nel libro di Carl B. Boyer «Storia della matematica», ISEDI, 1976 a pag. 37 si legge che: in un problema contenuto in un testo del periodo babilonese antico, troviamo due equazioni lineari a due incognite di 1° grado, chiamate nel testo rispettivamente il «primo anello d'argento» e il «secondo anello d'argento». Questo modo di esprimere con la parola «primo e secondo anello» una coppia di equazioni di primo grado formanti un sistema, potrebbe probabilmente avere una analogia con al rappresentazione geometrica esposta, dove gli anelli si distinguono con i rispettivi raggi: $u = (x + y) : 2$ e $v = (x - y) : 2$.

Rappresentazioni geometriche analoghe si trovano negli elementi di Euclide per la nota di costruzione di un segmento $x$ tale che $x^2 = ab$. V. pag. 94 del medesimo testo di Carl B. Boyer.

Alla stessa deduzione (A) si giunge se le incognite $(x, y)$ venissero moltiplicate per un medesimo numero «$a$» oppure per due numeri $(a, b)$ diversi fra loro e cioé ai sistemi rispettivi seguenti:

$$ax + ay = c, \quad ax - ay = d; \quad ax + by = c, \quad ax - by = d$$

risolvibili con lo stesso principio di cui sopra.

A queste deduzioni devono essere pervenuti in una probabile ipotesi i babilonesi, lo dimostra il fatto che come è noto, riconducevano frequentemente un sistema di 2° grado (fatto di somma e prodotto) in un sistema di 1° grado (fatto di somma e differenza).

Ad esempio una equazione quadratica del tipo $x^2 + b = ax$ con $b, a > 0$ è contenuta nel problema III del testo IX delle tavolette di Susa[(4)], che deriva dal sistema:

$$(2) \qquad x + y = a, \quad xy = b$$

esposto nella stessa tavoletta e che probabilmente rappresentavano col diagramma geometrico esposto in fig. 1.

Poiché in base alla deduzione (A) fatta in precedenza, il principio della semisomma e semidifferenza si applica per determinare le subradici, la ricetta babilonese si sarebbe basata nel determinare la subradice mancante, in questo caso «$v$» in quanto

$$u = (x + y) : 2 = a/2$$

è nota, quindi di conseguenza ricondurre il sistema del tipo (2) ad un sistema del tipo (1).

A tale scopo, trasformando il diagramma precedente di fig. 1 in quello equivalente di fig. 2 si osserva che i trapezi risultano equivalenti ai rettangoli $xy = b$; pertanto:

$$(a/2)^2 = b + v^2; \quad v^2 = (a/2)^2 - b$$

segue

$$v = \sqrt{(a/2)^2 - b} = (x - y) : 2$$

(4) Bruins-Rutten 1961, pp. 63-69.



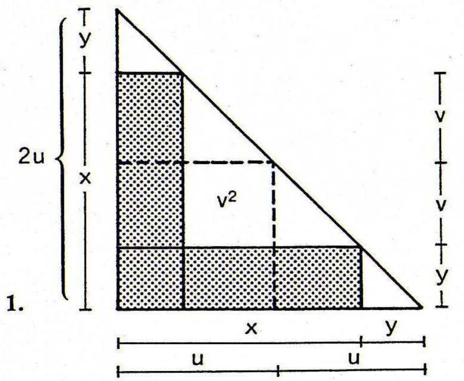



**Figura 1.**

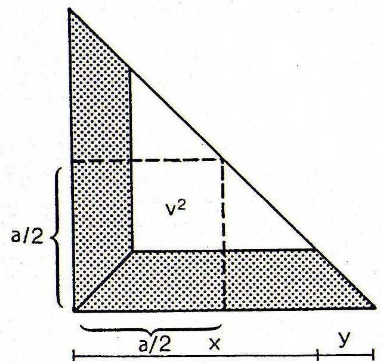



**Figura 2.**

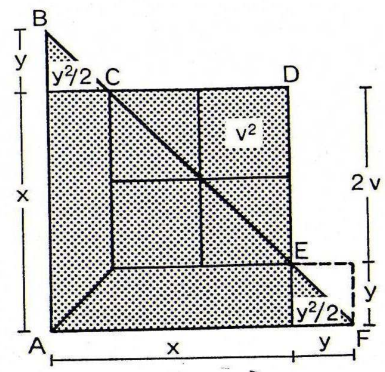



**Figura 3.**

sapendo che: $x, y = u \pm v$ si ha:

$$x = a/2 + \sqrt{(a/2)^2 - b}; \quad y = a/2 - \sqrt{(a/2)^2 - b}$$

che sono gli effettivi passaggi algebrici svolti dallo scriba.

I babilonesi non tenevano mai conto delle soluzioni negative, forse proprio perché i problemi restavano in un ancoraggio alle grandezze geometriche (sempre positive) ravvisabili nei diagrammi esposti suddetti.

Con gli stessi diagrammi era possibile tradurre algebricamente i passaggi che conducono alla soluzione del problema 1 del prisma AO 8862(5) nel quale lo scriba sfrutta l'identità:

$$(x + y)^2 : 2 - (x - y)^2 : 2 = 2\,xy$$

ravvisabile dai diagrammi stessi.

Lo stesso dicasi per i problemi 1 e 2 contenuti nella tavoletta BM 13901; se pur i passaggi forniti dallo scriba possono apparire come l'applicazione del completamento del quadrato, non è escluso che i problemi venissero risolti con il principio della semisomma e semidifferenza e quindi affrontati dal punto di vista sistematico onde derivano le equazioni proposte nel testo, per procedere poi direttamente ai passaggi algebrici mediante la visualizzazione dei diagrammi precedentemente esaminati, così che, con notevole praticità portavano alle soluzioni delle equazioni(6)

I passaggi algebrici suggeriti dai diagrammi ravvisano che, quando nel problema è ricavabile la subradice «$u$» e cioé nel caso in cui sia nota la somma delle incognite, l'espressione sotto radice del procedimento risolutivo esprimente «$v$» deve comparire come sottraendo; come minuendo, nel caso contrario: «noto $v$ ricercare $u$»; ciò che effettivamente veniva svolto dallo scriba.

Sulla strada dei diagrammi visti, era possibile stabilire la nota identità

(5) Il Prisma AO 8862 conservato al Louvre, risalente all'epoca di Hammurabi (1700 a.C. circa) e contenente 8 problemi, fu studiato da O. Neugebauer (1937) e da F. Thureau-Dangin (1938).

(6) Questo non esclude quanto supposto da Van Der Waerden per i prodotti notevoli, poiché i diagrammi esposti sono in perfetta armonia con quanto supposto dallo stesso Van Der Waerden ma per i problemi 1 e 2 contenuti nella nota tavoletta BM 13901 si è voluto percorrere una strada la cui conoscenza o meno del quadrato del binomio potrebbe risultare indifferente.



conosciuta dai babilonesi:

$$(x + y)^2 : 2 + (x - y)^2 : 2 = x^2 + y^2,$$

e ciò dall'esame della traduzione geometrica del sistema:

$$x + y = a, \quad x^2 + y^2 = b$$

e quindi dal diagramma esposto in fig. 3 che stabilisce:

$$A\,B\,F = (x + y)^2 : 2; \quad C\,D\,E = (x - y)^2 : 2;$$

$$A\,B\,C\,D\,E\,F = x^2 + y^2,$$

ovvero:

$$A\,B\,C\,D\,E\,F = A\,B\,F + C\,D\,E,$$

cioé:

$$x^2 + y^2 = \frac{(x + y)^2}{2} + \frac{(x - y)^2}{2}$$

Con ragionamento e diagramma analogo era possibile per i babilonesi tradurre algebricamente l'identità da loro sfruttata nel problema 9 della tavoletta BM 13901 e cioè la seguente:

$$\frac{x^2 + y^2}{2} = \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x - y}{2}\right)^2$$ (7)

Proseguendo sulla medesima strada dei ragionamenti sviluppati non era certo difficile per i babilonesi passare da un problema di 2° grado ad uno di 3° grado, bastava che si ponessero il problema di trovare i lati di un parallelepipedo a base quadrata nota la somma della lunghezza e dell'altezza e il volume, problema che equivale al sistema seguente:

$$x^2 y = a, \quad x + y = b;$$

il problema in questo caso noi lo rappresentiamo geometricamente con la

(7) Giacardi L. 1985, Alle origini dell'algebra. Dalle «ricette di calcolo» (Egizi, Babilonesi) al rigore dell'algebra geometrica (Greci). Atti degli incontri di Matematica, Provveditorato agli Studi di Grosseto, Grosseto pp. 21-46.

prospettiva, ma per i babilonesi era più pratico impastare direttamente l'argilla e ottenere forme come parallelepipedi, cubi ecc., formare ad esempio tavole quadrate di lato $x + y = b$, cioè:

$$(x + y)^2 = b^2;$$

sei di queste fuse o unite insieme formavano una scatola cubica di lato $x + y = b$, nella quale vi era contenuto il volume $x^2y = a$.

Questa strada viene percorsa, per far vedere come si arrivi alla costruzione nello spazio ipotezzata da S.J. Lurje(8) per la Sua nota dimostrazione della somma dei quadrati, il fatto di giungere alla stessa costruzione con argomenti del tutto diversi, rafforza sicuramente l'ipotesi di S.J. Lurje.

Prospetticamente il problema posto si presenta come nel diagramma di fig. 4.

Si può vedere e sperimentare che la subradice mancante «$v$» non è determinabile con la equiscomposizione del prisma mediante gli elementi noti e quindi solo con l'aiuto empirico di tabelle, elencando direttamente i valori da attribuire alle incognite in corrispondenza di volumi noti, l'ostacolo posto dal problema verrebbe leggermente superato(9).

Certamente operosi come erano i babilonesi, non gli deve essere sfuggito una semplice aggiunta che si poteva fare al problema suddetto, ricavando così il valore di «$v$» e cioé ponendo e sommando accanto al volume $x^2y = a_1$ il volume corrispondente: $y^2x = a_2$ e ciò arrivando al sistema seguente:

$$x^2y + y^2x = a, \quad x + y = b \tag{3}$$

(8) S.J. Lurje, Archimedes, Wien 1948, p. 17.

(9) Equazioni della forma $x^3 + x^2 = a$ venivano risolte dai babilonesi con l'uso di tavole una di queste, è stata rinvenuta e come è noto esprime i valori di $n^3 + n^2$ con $n$ intero variabile da 1 a 30.

Notare che per i babilonesi, ricorrere ad un ripiego empirico per la soluzione delle equazioni cubiche di cui sopra, deve aver rappresentato una soluzione poco gradita, in quanto disturbava l'armonia della loro uniformità logica di procedere, caratteristica della teoria delle equazioni algebriche. Tentare ugualmente di trovare una soluzione algebrica elegante, bisogna riconoscere che doveva rappresentare, per i babilonesi, un rompicapo notevole e forse impegnativo per generazioni, poiché il problema era arditissimo. Ci basti pensare, che solo nel 1500 d.C., con gli algebristi italiani, è stato proposto e risolto, questo problema, che ha segnato una tappa importante nella storia della matematica.



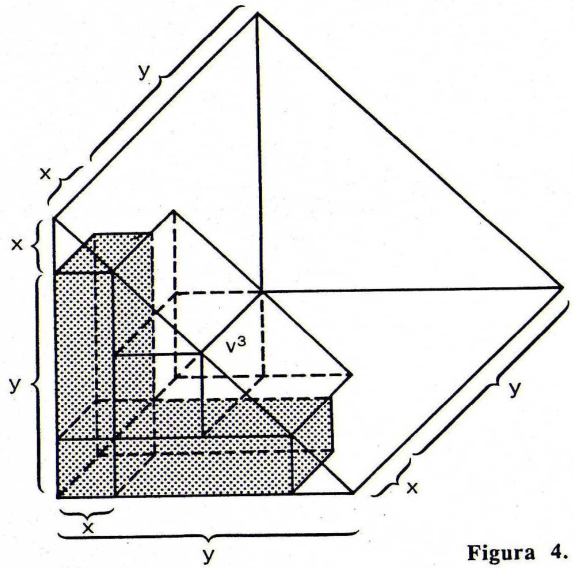



**Figura 4.**

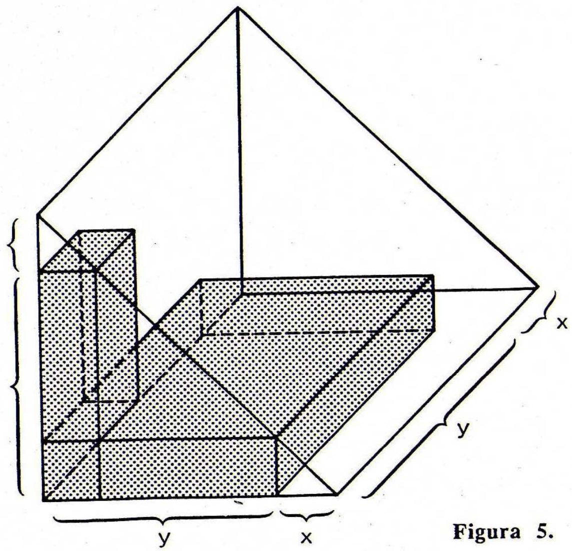



**Figura 5.**

che si può trasformare al noto sistema simmetrico di 2° grado che sapevano poi risolvere.

La rappresentazione prospettica del sistema (3) è quella esposta in fig. 5; il prisma può essere decomposto così nella somma di due parallelepipedi di dimensioni: $xy\ (x + y)$ più un prisma di sezione $2\ v^2$ e lunghezza pari a: $(x + y) = b$, infatti equiscomponendo si ottiene il diagramma di fig. 6.

I volumi dei due solidi a sezione trapezoidale sono equivalenti ai volumi dei due parallelepipedi, ognuno dei quali è la somma di:

$$x^2y + y^2x = a$$

Quindi il sistema (3) è risolubile poiché la subradice mancante «$v$» è determinabile. I passaggi algebrici per giungere alla soluzione desiderata sono suggeriti e quindi ravvisabili dai diagrammi precedentemente citati.

I babilonesi inoltre, risolvevano problemi a più incognite e non è escluso che si fossero posti come esercizio, un problema più generale o più ampio del precedente, che conduce al sistema seguente:

$$x^2y + y^2x = a; \quad x_1^2\,y_1 + y_1^2\,x_1 = c; \quad x_2^2\,y_2 + y_2^2\,x_2 = b^3/4;$$

$$x + y = x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = b \qquad (4)$$

cioè note le somme di parallelepipedi con volumi tra loro diversi ma con la somma uguale tra i rispettivi lati delle basi e le rispettive altezze, somma che è pari a: «$b$» (cioè isoperimetri) calcolare le basi e le altezze dei rispettivi parallelepipedi.

Un sistema risolubile, poichè basta applicare il procedimento risolutivo utilizzato per il sistema (3) e ripeterlo per ogni equazione del sistema (4).

La rappresentazione prospettica del sistema (4) è riportata in fig. 7 ed è esatttamente analoga alla costruzione proposta da S.J. Lurje per la dimostrazione della formula che consentiva ai babilonesi di determinare la somma dei quadrati di numeri interi consecutivi[10].

Il suddetto e probabile procedimento adottato dai babilonesi per giungere alle soluzioni dei problemi rinvenuti sulle tavolette d'argilla, ci induce ad osservare che lo stesso, si sviluppava diversamente da quello arabo e greco,

(10) Giacardi L., Roero S.C. 1979, «La matematica delle civiltà arcaiche», Egitto, Mesopotamia, Grecia, Stampatori Torino, pp. 132 e segg.



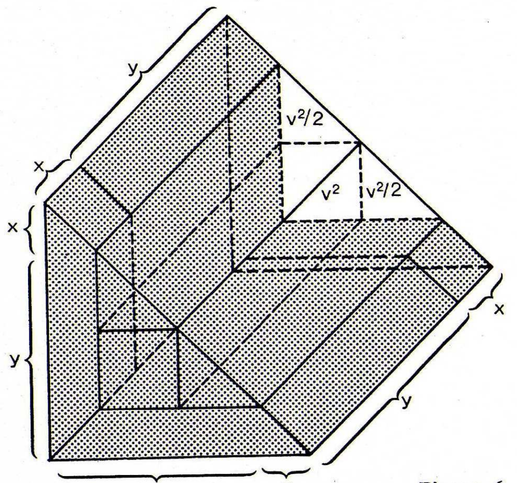



Figura 6.

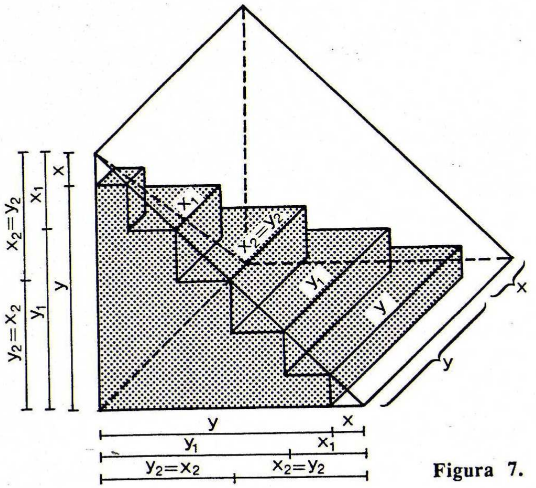



Figura 7.

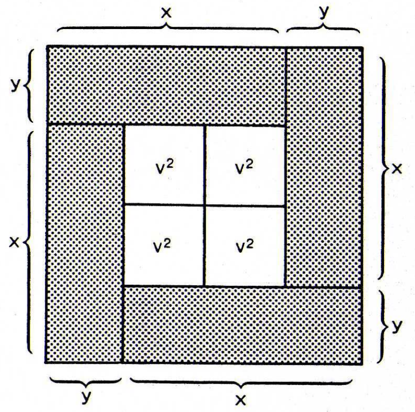



**Figura 8.**

in quanto, il concetto di fondo si basava unicamente sulla ricerca (con l'ausilio preliminare dei diagrammi) della subradice mancante «$v$» oppure «$u$», secondo i casi.

Vogliamo in ultimo far vedere come mediante diagrammi equivalenti a quelli già visti in precedenza, ma che non prevedono la sovrapposizione delle superfici e dei volumi, i babilonesi potevano raggiungere conclusioni analoghe a quelle viste per problemi sviluppati precedentemente e precisamente riproponendo il problema III del testo IX delle tavolette di Susa che come sappiamo porta al sistema seguente:

$$x + y = a, \quad xy = b;$$

in questo caso la determinazione di «$v$» è ravvisabile dal diagramma proposto in fig. 8, il quale mette in evidenza i passaggi algebrici da svolgere per determinare la subradice «$v$» e quindi le soluzioni del sistema.

Dallo stesso diagramma si possono intravvedere e stabilire le seguenti identità note e applicate dai babilonesi:

$$(x + y)^2 = 4\,xy + (x - y)^2$$



segue:

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4\,xy$$ [11]

Tenendo presente lo schema del diagramma di fig. 8, un problema di 3° grado che conduce al sistema seguente visto in precedenza e cioè:

$$x^2y = a, \quad x + y = b,$$

verrebbe di conseguenza rappresentato geometricamente mediante il diagramma esposto in fig. 9; i due volumi, quello superiore e quello inferiore, si incastrano perfettamente in modo da formare insieme un cubo di lato: $x + y$.

A prima vista, la soluzione per determinare la subradice «$v$» sembrerebbe a portata di mano, ma purtroppo sappiamo che non è così, in quanto, il volume inferiore del diagramma non si può determinare, pertanto il problema, dal punto di vista puramente algebrico, resta insoluto.

E' noto, che i babilonesi costruivano mediante impasto d'argilla, il modellino in miniatura come progettazione delle loro costruzioni edilizie e, chissà se a volte la ricerca (impegnativa) alla soluzione di un problema (come quello sopracitato) possa avere in qualche modo influito sull'architettura babilonese ... la torre di Babele, potrebbe forse costituire un esempio.

L'intero argomento che abbiamo visto, può risultare a nostro giudizio, come valido ausilio agli insegnanti a scopo didattico.

Il concetto di base della teoria babilonese delle equazioni algebriche è, come abbiamo visto, il principio che regola la semisomma e la semidifferenza delle incognite.

Lo spunto geometrico iniziale, offre il vantaggio di far comprendere in una misura più visibile e immediata, l'introduzione chiave, per lo studio successivo delle equazioni.

Quello che la teoria in uso presso i babilonesi, lascia intravvedere di maggiore utilità e interesse didattico è questa semplicità e uniformità di procedere con la medesima logica di base, dalle equazioni di 1° grado a quelle di grado superiore; un procedimento che si presenta sorprendente-

---

(11) Giacardi L., Roero S.C. 1979, «La matematica delle civiltà arcaiche», Egitto, Mesopotamia, Grecia, Stampatori Torino, pp. 132 e segg.

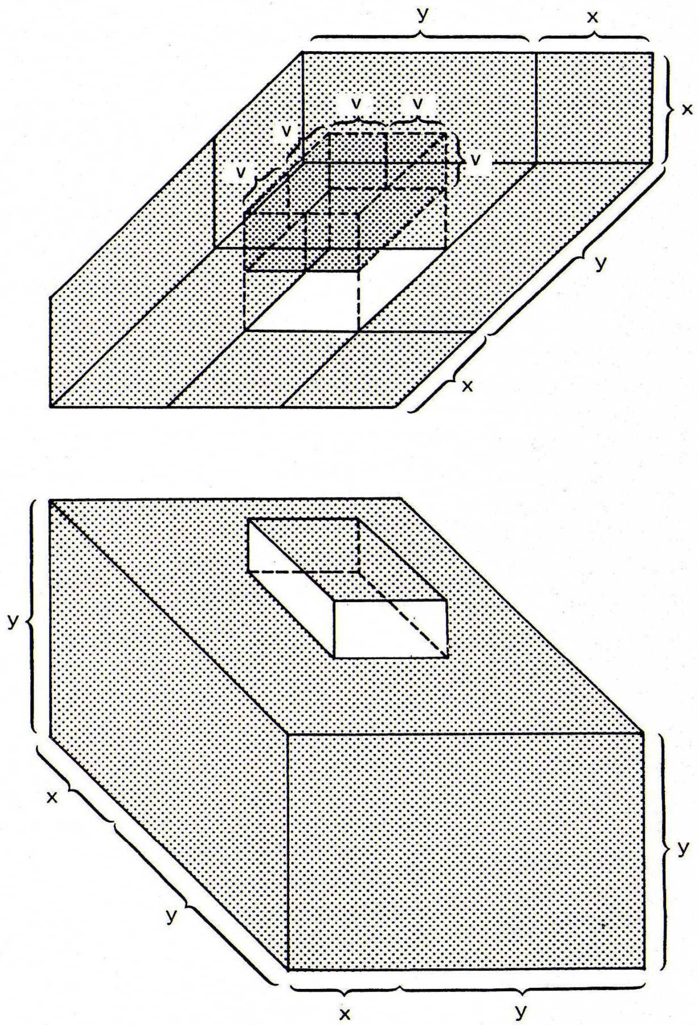



**Figura 9.**



mente a carattere comune per equazioni di 1°, 2° e 3° grado, cosa questa, che nei nostri e odierni libri di testo scolastici per il biennio delle scuole medie superiori[12], avviene in modo del tutto diverso e ben noto, dandoci la netta sensazione, che le equazioni di diverso grado siano categorie di equazioni indipendenti senza nessuna caratteristica comune, ad eccezion fatta di essere entrambe equazioni e vengono affrontate con metodi diversi e specifici.

Il procedimento babilonese ci suggerisce che lo studio delle equazioni può essere affrontato non solo in modo diverso, ma lascia capire che in fondo le equazioni risolubili, anche se di diverso grado hanno tutte come una specie, se così si può dire, di albero genealogico di appartenenza e ciò in quanto, se le equazioni sono risolubili è perchè non sono altro che forme equivalenti più evolute di sistemi base più semplici e di grado anche inferiore dai quali discendono[13]

Infatti i sistemi stabiliti e risolti nelle prime pagine del presente lavoro:

(1) $x + y = c, \quad x - y = d;$

(2) $x + y = c/a, \quad x - y = d/a$

(3) $ax + by = c, ax - by = d$

sono dei sistemi fondamentali e di base per altri sistemi che sono risolubili, anche di grado superiore al primo e, se sono risolubili e perchè sono riconducibili e quindi equivalenti ad uno dei sistemi base esposti.

Dalla teoria babilonese si può così definire, sulla base della deduzione (A) che un sistema elementare di 1° grado di due equazioni in due incognite è compatibile se le equazioni formanti il sistema sono espresse a condizione necessaria e sufficiente, una da una somma e l'altra dalla differenza di due monomi nelle incognite $x, y$.

La soluzione si determina come abbiamo visto, determinando le subradici

(12) Soprattutto per i libri di testo rivolti agli Istituti Tecnici es. «Aritmetica e Algebra» e «Algebra e Geometria Analitica» del Prof. Giuseppe Zwirner per il biennio degli Istituti Tecnici per Geometri. Edizioni Cedam. Padova.

(13) Questo è un punto didattico interessante, suggeritoci dalla teoria babilonese delle equazioni algebriche e che noi suggeriamo ai docenti in quanto gli studenti in genere, vengono attratti e appagati da uno svolgimento semplice ed esauriente che, partendo da un uniforme principio come quello babilonese che permette di risolvere rapidamente le equazioni, spiega anche il perché certe equazioni sono risolubili e altre no.

$(u, v)$ e ciò noi la possiamo ottenere mediante sostituzione.

La sostituzione delle subradici alle incognite può essere fatta in sistemi anche di grado maggiore al primo.

prima di procedere a sistemi di grado superiore, consideriamo dapprima un noto sistema di 1° grado i cui coefficienti, in termini di valore assoluto, non siano proporzionali e cioè il seguente:

$$(4) \qquad ax + by = c, \quad a'x + b'y = c'$$

A questo proposito si può considerare a piacere una delle due equazioni del sistema (4), premesso di considerare la prima, si porrà:

$$x = (u + v)/a; \quad y = (u - v)/b$$

e sostituendo si ottiene:

$$u = c/2, \quad u(a'/a + b'/b) + v(a'/a - b'/b) = c'$$

e quindi:

$$x = (bc' - b'c) : (a'b - ab'); \quad y = (a'c - ac') : (a'b - ab')$$

che sono le effettive soluzioni del sistema (4).
Se il sistema è risolubile ciò vuol dire che è equivalente ad uno dei sistemi fondamentali di base, ed in effetti il sistema (4) è equivalente al sistema base (3), infatti se all'espressione:

$$(5) \qquad u(a'/a + b'/b) + v(a'/a - b'/b) = a'x + b'y = c'',$$

il primo membro della (5) lo si riduce a $2v$, il secondo si riconduce inevitabilmente ad una equazione di 1° grado di due incognite espressa dalla differenza di due monomi aventi per coefficienti gli stessi della prima equazione del sistema (4) e il terzo membro ad una espressione di termini noti che si pone uguale a «$d$»; in conclusione il sistema (4) si riconduce al sistema (3) fondamentale di base.

Procedendo per ordine di grado, applichiamo ora quanto detto ad un noto sistema simmetrico di 2° grado, dal quale derivano le note equazioni complete di 2° grado:

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad ay^2 + by + c = 0$$

e cioè il sistema:



$$xy = c/a, \qquad x + y = - b/a,$$

per cui posto:

$$x = u + v; \qquad y = u - v$$

si ha;

$$u^2 - v^2 = c/a, \qquad u = - b/2a,$$

quindi:

$$x_{1,2} = \frac{-b + \pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad y_{1,2} = \frac{-b - \pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ovvero:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

che sono le effettive e note formule risolutrici delle equazioni di 2° grado.

Si intravvede spontaneamente la relazione fra le radici e i coefficienti delle equazioni ed inoltre si può appurare che il sistema simmetrico di 2° grado è equivalente al sistema di base (2).

Come la conclusione alle equazioni quadratiche, vogliamo far vedere come le formule di risoluzione sopra esposte siano una forma particolare di una formula più generale; a tale scopo dallo sviluppo di cui sopra:

$$u^2 - v^2 = xy = c/a, \qquad x + y = - b/a,$$

moltiplichiamo la prima equazione per il numero 4, avremo:

$$4u^2 - 4v^2 = 4xy = 4c/a, \qquad x + y = - b/a$$

ovvero:

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy = 4c/a, \; x + y = - b/a;$$

ponendo gli esponenti della prima equazione pari a «$n$» avremo:

$$(x+y)^n - (x-y)^n = 2\left[\binom{n}{1} x^{n-1}y + \binom{n}{3} x^{n-3}y^3 + \binom{n}{5} x^{n-5}y^5 + \ldots\right.$$

$$+\binom{n}{n-1}xy^{n-1}+\binom{n}{n}y^{n}\Big] = 2^{n}\,c/a, \quad x+y = -\,b/a$$

Se «$n$» è pari si toglie il termine

$$\binom{n}{n}y^{n},$$

se invece è dispari si toglie:

$$\binom{n}{n-1}xy^{n-1};$$

il sistema (6) è risolto con le seguenti formule generalizzate:

$$x = \frac{-b+\ \pm\ \sqrt[n]{(-b)^{n}-2^{n}a^{n-1}c}}{2\,a}\ ;\ y = \frac{-b\ -\pm\ \sqrt[n]{(-b)^{n}\ -\ 2^{n}a^{n-1}c}}{2\,a}$$

Quando l'indice della radice è dispari, il segno ($\pm$) si toglie e si evidenzia quello del radicando; per $n = 2$ otterremo le formule risolutive delle equazioni complete di 2° grado già esaminate.

In ultimo vogliamo affrontare un sistema di terzo grado, dal quale derivano le seguenti e note equazioni:

$$x^3+qx+r=0;\quad q^3y^3-3\,rq^2\,y^2+(3\,r^2q+q^4)\,y-r^3=0$$

e cioè il sistema seguente:

$$x^3+qy=0,\qquad x-y=-\,r/q;$$

sostituendo le subradici alle incognite, avremo:

$$u^3+v^3+3\,uv\,(u+v)+q(u-v)=0,\quad 2v=-\,r/q$$

Si osserva che la prima equazione è completa e di 3° grado in «$u$», pertanto non trova una soluzione poiché non è riconducibile ad uno dei sistemi base conosciuti.

L'unico modo per ottenere la prima equazione nella sola subradice in «$u$» è quello di porre una terza equazione o condizione al sistema cioé:

$$uv=-\,q/3,$$

infatti si ottiene il nuovo sistema in tre equazioni:



$$u^3+v^3+r=0,\quad uv=-\,q/3,\quad v=-\,r/2\,q.$$

Abbiamo ora due espressioni di «$v$», dobbiamo così scegliere quella che soddisfi alla condizione posta, cioè:

$$uv=-\,q/3;\ \text{ cioè: }\ v=-\,q/3u,$$

da cui si ricava

$$u = \sqrt[3]{-\,r/2\pm\sqrt{r^2/4+q^3/27}}$$

sapendo inoltre che:

$$v^3=-\,r-u^3$$

si ottiene:

$$v = \sqrt[3]{-\,r/2\mp\sqrt{r^2/4+q^3/27}}$$

per distinzione scegliamo il segno algebrico superiore, avremo:

$$x = \sqrt[3]{-\,r/2+\sqrt{r^2/4+q^3/27}}+\sqrt[3]{-\,r/2-\sqrt{r^2/4+q^3/27}}$$

$$y = \sqrt[3]{-\,r/2+\sqrt{r^2/4+q^3/27}}+\sqrt[3]{-\,r/2-\sqrt{r^2/4+q^3/27}}+r/q$$

Le formule risolutive sono quelle ricavate dai matematici del XV secolo, Tartaglia e Cardano, ma è sorprendente che il principio della semisomma e semidifferenza delle incognite è ancora il protagonista principale che porta alla soluzione delle equazioni di terzo grado, che hanno impegnato i matematici del periodo rinascimentale(14).

---

(14) Il fatto che con il medesimo principio si possono affrontare con la stessa logica e difficoltà delle equazioni precedenti, anche le equazioni di 3° grado complete ridotte nella nota forma canonica ci induce a ritenere che l'introduzione delle medesime come argomento di studio per le scuole medie superiori potrebbe essere accessibile. Inoltre con lo stesso principio babilonese della semisomma e semidifferenza delle incognite si possono affrontare con più speditezza particolari sistemi di grado superiore al secondo riscontrabili negli odierni libri di testo e cioé ad es. i seguenti: $x^3+y^3=b,\ x+y=a$; $x^2+y^2=a,\ xy=b$. Facciamo presente, a titolo di curiosità che la formula risolutiva per la y, presenta una forma, analoga a quella, che è oggi nota come «formula di risoluzione dell'equazione di terzo grado risolvente» dell'equazione di quarto grado data, e che venne scoperta da Ludovico Ferrari, su richiesta di Gerolamo Cardano e fu pubblicata da quest'ultimo nel suo trattato «Ars magna».

## BIBLIOGRAFIA

L. GIACARDI, S.C. ROERO, *La matematica delle civiltà arcaiche. Egitto, Mesopotamia, Grecia*, Stampatori, Torino 1978.
L. GIACARDI in AA.VV., *L'alba dei numeri*, Dedalo, Bari 1987.
L. GIACARDI, 1985, *Alle origini dell'algebra. Dalle «ricette di calcolo» (Egizi, Babilonesi) al rigore dell'«algebra geometrica» (Greci)*, Atti degli incontri di Matematica, Provveditorato agli Studi di Grosseto, Grosseto.
C.B. BOYER, *Storia della Matematica*, Milano 1976.
C. SINGER, *Breve storia del pensiero scientifico*, Piccola Biblioteca Einaudi, Torino 1969.
E.M. BRUINS, M. RUTTEN, *Textes Mathématiques de Suse*, in Mémoire de la Mission Archéologique en Iran, XXXIV, Librairie orientaliste Paul Geuthner, Paris 1961.
M. CAVEING, *La constitution du type mathématique de l'idealité dans la pensée grecque*, Atelier National de reproduction des théses, I, II, III, Université de Lille III, 1982.
R. FRANCI, L. TOTI RIGATELLI, *Storia della teoria delle equazioni algebriche*, Mursia, Milano 1979.
A. FRAYESE, *Attraverso la storia della matematica*, Le Monnier, Firenze 1970.
O. NEUGEBAUER, *Le scienze esatte nell'antichità*, Feltrinelli, Milano 1974.
O. NEUGEBAUER, *Mathematische Keilschrift*, Texte I, II, III, Reprint, Springer-Verlag, Berlin 1934.
P. TANNERY, *De la solution géométrique des problémes du second degré avant Euclide, (1882)*, in Mémoires Scientifiques, I, Gauthier Villars, Paris 1912.
THUREAU, F. DANGIN, *Textes mathématiques babyloniens*, E.J. Brill, Leiden 1938.
K. VOGEL, *Vorgriechische Mathematik*, I, II, Hermann Schroedel Verlag, Hannover 1959.
L.B. VAN DER WAERDEN, *Science Awakening*, P. Noordhoff, Groningen 1954.
L.B. VAN DER WAERDEN, *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer Verlag, Berlin 1983.
H.G. ZEUTHEN, *Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le Moyen Age*, Gauthier Villars, Paris 1902.
G. IFRAH, 1984, *Storia universale dei numeri*, A. Mondadori, Milano.
S.J. LURJE, *Archimedes*, Wien 1948.
G. CHILDE, *Il progresso nel mondo antico*, Torino 1963.
M. COHEN, *La grande invention de l'écriture et son évolution*, Parigi 1958.
H. EVES, *An introduction to the history of Mathematics*, New York 1964.
H. FRANKFORT, J. WILSON, T. JACOBSEN, W. IRWIN, *La filosofia prima dei Greci*, Torino 1963.
J. FRIEDRICH, *Decifrazione delle scritture scomparse*, Firenze 1961.
G. FURLANI, *La civiltà babilonese ed assira*, Roma 1929.
F.X. KUGLER, *Sternkunst und Sterndienst in Babel*, Munster 1907-1935, 2 voll.
B. MEISSNER, *Babylonien und Assirien*, 2 voll., Heidelberg 1925.
A. PARROT, *I Sumeri*, Milano 1961.
A. PARROT, *Archéologie mésopotamienne*, I, II, Parigi 1935.

**Subscription Information:**

**1989** numbers 1 - 3

Individual subscription price for **1989:**

in Italy **L. 20.000** (lire italiane)
and abroad **L. 25.000** (lire italiane)

including postage.

Single Number: **L. 5.500** (lire italiane - I.V.A. compresa)

Suscription price **1989** for Institutions, Libraries, Schools:

in Italy **L. 35.000** (lire italiane)
and abroad **L. 50.000** (lire italiane)

including postage.

**YOU ARE INVITED TO SUBSCRIBE**

Please send a money order, made out to:

Centro Ricerca e Sperimentazione
dell'Educazione Matematica
Viale Merello, 92
**09100 CAGLIARI - ITALY**

It is important to write our account number: **N. 19490093**

---

La Rivista è distribuita gratuitamente ai Soci.

A norma dell'art. 74, lett. c) del D.P.R. 26-10-1972, n. 633, e del D.M. 28-12-1972, l'Iva pagata dall'Editore sugli abbonamenti, nonché sui fascicoli separati, è considerata nel prezzo di vendita, intendendosi che il cessionario non è tenuto ad alcuna registrazione ex articolo 25 decreto 633/1972 e non può parimenti operare alcuna detrazione (CFR. R.M. 14-4-1973 n. 532159).