Numero 3 Set-Dic 2008 Volume 1 Serie X Anno CXVIII

Rivista quadrimestrale - Poste Italiane SpA - Sped. in Abb. Postale - D.L. 353/2003
(conv. in L. n. 46 del 27/02/2004) art. 1 comma 2 - CNS BA

Periodico di matematiche

Organo della MATHESIS

Società italiana di scienze
matematiche e fisiche
fondata nel 1895

Mathesis

Autorizzazioni e supporti

Autorizzazione Tribunale di Bologna n. 266 del 29/3/1950
L'uso della testata PERIODICO DI MATEMATICHE è gentilmente concesso alla Mathesis dalla proprietaria Casa Editrice Nicola Zanichelli – Bologna.

Condizioni di vendita

Il PERIODICO DI MATEMATICHE è distribuito gratuitamente ai soci Mathesis. Coloro che desiderano associarsi devono rivolgersi al Presidente di una delle sezioni elencate sul sito www.mathesisnazionale.it.

Abbonamenti per Scuole ed Enti Vari**:**

Per l'Italia	€ 60,00
Per l'Estero	€ 70,00

Prezzo di un fascicolo**:**

Per l'Italia	€ 6,00
Per l'Estero	€ 12,00

cc /postale, Codice IBAN: IT05I0760104000000048597470

intestato a Mathesis Nazionale, via Zanardelli 70051 Barletta

www.mathesisnazionale.it, info@mathesisnazionale.it

ISSN 1582-883

Frames: un'importante generalizzazioni delle basi vettoriali per la robustezza dei dati

Veronica Palma[1]

Sunto: Vengono introdotti i frames, particolari insiemi di vettori dipendenti di uno spazio vettoriale in cui possono essere sviluppati in maniera ridondante tutti i vettori dello stesso spazio. La ridondanza assicura alcuni vantaggi importanti nella teoria delle comunicazioni, come recuperare l'intera informazione sul vettore in caso di perdita di alcuni coefficienti e avere maggiore immunità al rumore nella trasmissione.

Abstract: We introduce frames, special sets of vectors with which to expand redundantly all the other members of the vector space. Redundancy involves some advantageous features with regard to communication theory: the possibility to retrieving all the information carried by the vector if some coefficients of the expansion get lost and more immunity to noise added in transmission.

Parole chiave: frames, spazi vettoriali, teoria delle comunicazioni.

INTRODUZIONE

Questo lavoro intende essere un'esposizione divulgativa di recenti sviluppi matematici sugli spazi vettoriali, con importanti applicazioni nella teoria dei segnali per le comunicazioni. L'esposizione è rivolta al lettore che conosce anche genericamente gli spazi vettoriali, la teoria dei segnali e la trasmissione di dati.

[1] Dipartimento di Elettronica Applicata – Università di RomaTre - veronica.palma@uniroma3.it

L'esposizione si articola in due sezioni: nella prima si riassumono le definizioni preliminari e si riassume il contesto tecnico-scientifico di teoria dei segnali nel quale sorgono problemi a cui si può far fronte introducendo i frames (=cornici vettoriali oppure inquadramenti energetici? Non è ancora presente una traduzione italiana standard). Nella seconda sezione si definiscono i frames e se ne esplorano le proprietà.

DEFINIZIONI PRELIMINARI.

L'espressione o sviluppo di vettori v nel piano euclideo (spazio a 2D; passare allo spazio a 3D comporta solo l'aggiunta di una componente vettoriale) è:

$$v=c_x u_x+c_y u_y \tag{1}$$

dove i due vettori u_x e u_y sono ortonormali, cioè ortogonali tra loro e di norma (modulo) pari a 1. La norma del vettore v è una quantità positiva finita data da

$$||v||= \sqrt{c_x^2 + c_y^2} \tag{2}$$

e le componenti del vettore c_x e c_y, si ottengono tramite l'operazione nota di prodotto scalare o prodotto interno, che indicheremo con $< , >$:

$$c_x=<v, u_x>, \qquad\qquad c_y=<v, u_y> \tag{3}$$

Fissata la base vettoriale u_x e u_y, la coppia di coefficienti (c_x, c_y) è univocamente determinata dal vettore v e, tramite la somma (1), determina univocamente il vettore v. I coefficienti sono le proiezioni del vettore v sui vettori di base.

I precedenti concetti sono facilmente generalizzati a uno spazio di Hilbert a N dimensioni H^N con N eventualmente infinito. Le formule precedenti per basi ortonormali divengono:

v = $\sum_n c_n u_n$, c_n= <v,u_n>, $||v||^2$ = <v,v> = $\sum_n |c|_n^2$,   (n=1……N)   (4)

L'ente matematico vettore comprende anche le funzioni f(x) con x variabile definita in un opportuno intervallo (a,b) (eventualmente infinito) per le quali si possa definire una norma e un prodotto interno. In molti casi di interesse la norma di funzioni è definita

$$||f|| = \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx\right]^{1/2} \tag{5}$$

Si definisce prodotto interno tra due funzioni f(x) e g(x) (consideriamo solo funzioni reali di variabile reale)

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \tag{6}$$

Due funzioni per le quali il prodotto interno è nullo si dicono ortogonali.
Data una base di vettori-funzione ortonormali {f_n(x)}, ogni funzione f(x) può essere sviluppata in funzione di essi

$$f(x) = \sum_n c_n f_n(x) = \sum \langle f, f_n\rangle f_n \tag{7}$$

e, se vale lo sviluppo (7), la norma (5) può anche scriversi (uguaglianza di Parseval o di Plancherel)

$$||f|| = \left[\sum_n |c_n|^2\right]^{1/2} \tag{8}$$

Ogni elaborazione da effettuarsi sulla funzione f(x) individua univocamente una corrispondente operazione sui coefficienti c_n denominati coefficienti di Fourier (questa seconda operazione può risultare spesso più semplice o più intuitiva di quella originale).

1.2 Contesto della teoria dei segnali.

Nella teoria dei segnali gli svantaggi principali di sviluppare un segnale in una base, cioè in proiezioni indipendenti sono due:
a)spesso in trasmissione o in archiviazione del segnale si possono perdere alcuni coefficienti. Nello sviluppo ridondante in frames tale perdita può essere recuperata tramite gli altri coefficienti, come vedremo negli esempi;
b) spesso in trasmissione o in archiviazione i coefficienti possono "degradarsi" ovvero al valore esatto c_n può sovrapporsi un contributo casuale e dannoso di "rumore" che altera l'informazione portata dal coefficiente c_n . Vedremo negli esempi che lo sviluppo in frames diminuisce l'effetto negativo del rumore.

2. Teoria e tecnica dei frames

Premettiamo alla definizione dei frames, una breve analisi delle basi non ortogonali. Facciamo esempi di vettori geometrici $v= (v_x,v_y)$ sul piano ma i risultati sono immediatamente generalizzabili ad uno spazio di Hilbert H^N.

2.1 Basi non ortogonali.

Un qualunque vettore del piano v = (a,b) ha norma

$$||v|| = \langle v,v\rangle = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (9)$$

dove i coefficienti (a,b) possono ricavarsi dallo sviluppo in una opportuna base ortogonale, che non considereremo ulteriormente.
Consideriamo nel piano anche una base non ortogonale costituita, ad esempio, dai due vettori di norma unitaria $u_1= (1,0)$ e $u_2= (\cos\theta, \sin\theta)$ (per $\theta =\pi/2$ la base diventa ortogonale).
I prodotti interni con i vettori u_1e u_2 della base valgono

$$\langle v,u_1\rangle = a, \quad \langle v,u_2\rangle = a \cos\theta + b \sin\theta \qquad (10)$$

Con questi coefficienti le relazioni (4) di sviluppo e norma tramite prodotto interno non valgono, tranne che nel caso di ortogonalità, $\theta = \pi/2$.
Tuttavia la relazione di sviluppo è talmente importante che vogliamo analizzare a quale prezzo possiamo reintrodurla. Dati i due coefficienti espressi nella (10), lo sviluppo è possibile con i vettori $\tilde{u}_1$ e $\tilde{u}_2$ di un'altra base determinabili imponendo la condizione

$$<u_i, \tilde{u}_j> = \delta_{ij}, \quad (i,j=1,2) \tag{11}$$

Con semplice calcolo si ottengono due vettori ortogonali a u_1e u_2

$$\tilde{u}_1 = k(\sin\theta, -\cos\theta), \quad \tilde{u}_2 = k\,(0,1), \quad (k==1/\sin\theta) \tag{12}$$

Il fattore k assicura che $(u_i, \tilde{u}_i)$ valga 1: ciò semplifica le espressioni ma non è strettamente necessario perché valga uno sviluppo. Le due basi $\{u_1,u_2\}$ e $\{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2\}$ si dicono duali o biortogonali. Si noti che quando $\theta = \pi/2$, le due basi coincidono, cioè le basi ortogonali sono autoduali. Si verifica facilmente che il vettore v=(a,b) ha il doppio sviluppo

$$v = <v, u_1> \tilde{u}_1 + <v, u_2> \tilde{u}_2 = <v, \tilde{u}_1> u_1 + <v, \tilde{u}_2 > u_2 \tag{13}$$

Tuttavia la norma non può ottenersi con la terza delle relazioni (4) ovvero non vale l'uguaglianza di Parseval. E' immediato verificare che il procedimento di costruzione delle basi biortogonali si estende a N>2 dimensioni.

Si noti infine che anche nella base non ortogonale la perdita di un coefficiente impedisce la ricostruzione del vettore, poiché i vettori di base sono indipendenti. Tale caratteristica rimane vera anche considerando il caso generale di basi biortogonali in N dimensioni

2.2 Sviluppi in insiemi di vettori dipendenti.

Abbiamo evidenziato come le perdite di coefficienti siano un problema reale e quindi come sia utile avere coefficienti ridondanti in informazione, in modo da poter ricostruire il contributo di informazione dei coefficienti eventualmente persi. Si consideri un insieme di vettori dipendenti sul piano e analizziamo il significato dello sviluppo del solito vettore $v = (a,b)$. Per rendere le cose intuitive prendiamo sul piano la terna di vettori dipendenti che chiameremo frame (daremo la definizione generale di frame nel seguente paragrafo)

$$u_1 = (1,0),\ \ u_2 = (0,1),\ u_3 = (\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta\ u_1 + \sin\theta\ u_2 \qquad (14)$$

I primi due costituiscono una base ortonormale e autoduale; il terzo è una combinazione lineare dei primi due ed è unitario (norma=1). La terna è ridondante. Le coppie u_1,u_3 e u_2,u_3 sono basi non ortogonali, per il piano (v.par.2.1) e ammettono ciascuna una base duale diversa. I prodotti interni di v con la terna sono

$$\langle v, u_1\rangle = a, \quad \langle v, u_2\rangle = b, \quad \langle v, u_3\rangle = a\cos\theta + b\sin\theta \qquad (15)$$

Il vettore $v = (a,b) = a\ u_1 + b\ u_2$ può scriversi formalmente come combinazione della terna purchè u_3 abbia coefficiente nullo. Possiamo scrivere infinite espressioni di valore nullo. Per semplificare i calcoli scegliamo il coefficiente a-a=0 (con altre scelte il risultato strutturale sarà lo stesso, ma con espressioni più complesse)

$$\begin{aligned} v &= a\ u_1 + b\ u_2 + (a-a)\ u_3 = a\ u_1 + b\ u_2 + a\,(\cos\theta\ u_1 + \sin\theta\ u_2) - a\ u_3 \\ &= a(1+\cos\theta)\ u_1 + (b + a\sin\theta)\ u_2 - a\ u_3 \qquad (16) \end{aligned}$$

I coefficienti dello sviluppo hanno espressione

$$c_1 = a(1+\cos\theta), \quad c_2 = b + a\sin\theta, \quad c_3 = -a \qquad (17)$$

La procedura generale per individuare la terna duale coinvolge un calcolo matriciale. Tuttavia in casi semplici come questo possiamo trovare facilmente il frame duale scrivendo v in analogia a quanto fatto nelle (13) per il caso della base biortogonale

$$v = \langle v, \tilde{u}_1\rangle\ u_1 + \langle v, \tilde{u}_2\rangle\ u_2 + \langle v, \tilde{u}_3\rangle\ u_3 \qquad (18)$$

utilizzando le (15) risulta immediatamente

$\tilde{u}_1 = (1+\cos\theta)\, u_1, \quad \tilde{u}_2 = \sin\theta\, u_1 + u_2, \quad \tilde{u}_3 = -u_1$ (19)

Si vede con facili calcoli che vale anche lo sviluppo nella terna duale

$v = \langle v, u_1\rangle\, \tilde{u}_1 + \langle v, u_2\rangle\, \tilde{u}_2 + \langle v, u_3\rangle\, \tilde{u}_3$ (20)

E' importante sottolineare alcune caratteristiche dell'elaborazione effettuata:
1) Siccome gli sviluppi (18) e (20) sono su terne ridondanti, bastano due qualsiasi dei tre coefficienti per ricostruire il vettore v: il procedimento è uguale a quello descritto nel precedente paragrafo. Questo è un vantaggio essenziale dello sviluppo in frames (vedi paragrafo seguente).
2) Come nel caso delle basi non ortogonali abbiamo però rinunciato alla possibilità di esprimere la norma con i coefficienti. Nel paragrafo seguente faremo esplicitamente i calcoli.
3) fissata la terna(14), abbiamo ottenuto i coefficienti c_i (i = 1,2,3) imponendo che il coefficiente nullo di u_3 fosse a-a. Si possono avere infiniti sviluppi diversi esprimendo diversamente il fattore nullo che portano a coefficienti diversi e basi duali diverse

2.3 Introduzione ai frames.

Abbiamo visto che ogni $v \in H^N$ (H^N = spazio di Hilbert a N dimensioni) può essere sviluppato in un insieme arbitrario di M vettori, dipendenti o indipendenti $\{u_n\}$ (n=1….M; M≥N)

$$v = \sum_n \langle v, \tilde{u}_n \rangle u_n = \sum_n c_n u_n \qquad (21)$$

con coefficienti c_n dati dai prodotti interni di v con i vettori della base duale $\{\tilde{u}_n\}$. Entrambi gli insiemi $\{u_n\}$ e $\{\tilde{u}_n\}$ non sono univocamente determinati. Se $\{u_n\}$ è una base ortonormale vale il teorema di Parseval. Nel caso dei vettori-funzione f sviluppati in basi $\{f_n\}$ ortonormali (non

ridondanti), l'energia si conserva nel passaggio da f alla trasformata, cioè al vettore dei coefficienti di Fourier. Se si perde o si altera anche un solo coefficiente si perde energia e informazione del segnale. Ciò rende questi sviluppi particolarmente critici e fragili di fronte alla presenza di rumore e/o alla perdita di qualche coefficiente.
Definiamo i frames: l'insieme di vettori$\{h_n\}$ costituisce un frame se, dati A,B reali positivi risulta

$$A\|v\|^2 \leq \sum_n \left|\langle v, h_n \rangle\right|^2 \leq B\|v\|^2 \qquad (22)$$

Ciò comporta che il quadrato della norma (ovvero l'energia) del vettore dei coefficienti $\{c_n = \langle v,h_n \rangle\}$ deve essere "inquadrata" (framed) tra i valori $A\|v\|^2$ e $B\|v\|^2$. L'espressione (22) comprende anche il caso delle basi ortonormali ponendo A=B=1.
Poiché il frame $\{h_n\}$ non determina univocamente i coefficienti $\{c_n\}$, tranne che nel caso si riduca ad una base, anche i parametri A e B non sono univocamente determinati. Si osservi la differenza tra energia e informazione negli sviluppi in frames (che non c'era nello sviluppo in basi: nel caso dei frames se si perde qualche coefficiente si perde energia dello sviluppo, ma non informazione.
I frames più stretti si hanno per insiemi $\{h_n\}$ per i quali A=B: si chiamano appunto tight frames. Ad essi appartengono le basi ortonormali per le quali è A=B=1 e vale il teorema di Parseval. Vedremo però con gli esempi la ricchezza e la varietà dei frames: esistono tight frames costituiti da vettori dipendenti (non sono basi) e addirittura tight frames con A=B=1 che non sono basi ortonormali ma per i quali vale il teorema di Parseval, cioè si conserva l'energia; viceversa esistono frames costituiti da vettori indipendenti (sono basi ma non ortogonali) che non sono tight frames.
Le proprietà dei frames sono tante e non possono essere tutte discusse in questa breve rassegna divulgativa; ne discuteremo alcune direttamente sugli esempi seguenti sul piano che, in termini algebrici, è uno spazio di Hilbert H^2. Ricordiamo però che nella teoria dei segnali l'interesse è negli spazi di funzioni.
Esempio 1: θ-frames .

Riprendiamo in considerazione la terna di vettori dipendenti studiata nel paragrafo 2,2 espressa nella (14) e per la quale valgono le espressioni (15) –(20).
I coefficienti dello sviluppo di v dati dalla (15) danno come somma dei quadrati

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = a^2 + b^2 + \left|\langle v, u_3\rangle\right|^2 = \|v\|^2 + \left|\langle v, u_3\rangle\right|^2 =$$
$$\|v\|^2\left(1+\left(\frac{\left|\langle v, u_3\rangle\right|}{\|v\|}\right)^2\right) = \|v\|^2\left(1+\left(\frac{|c_3|}{\|v\|}\right)^2\right) \tag{23}$$

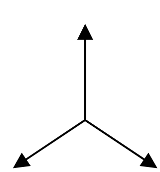
La quantità c_3 ha modulo nullo quando $v \perp u_3$ e modulo pari a $||v||$ quando $v // u_3$. Nei due casi il fattore che moltiplica $||v||^2$ nell'ultimo membro delle (23) vale rispettivamente 1 e 2. Quindi la terna (u_1,u_2,u_3) è un frame per lo sviluppo di $v \in H^2$ (il piano) con A=1 e B=2, cioè per esso

$$\|v\|^2 \le \sum_n \left|\langle v, h_n\rangle\right|^2 \le 2\|v\|^2 \tag{24}$$

Non si tratta di un tight frame: A≠B. Quindi la trasformazione che porta al vettore dei coefficienti non conserva l'energia.
Abbiamo denominato θ-frames questa famiglia di frames (famiglia perché al variare di θ si hanno frames diversi).

Esempio 2: MB frames.

Il frame MB (Mercedes-Benz) è composto da una terna di vettori posti simmetricamente sul piano ad angoli uguali di $2\pi/3$ come in figura (la disposizione dei vettori ricorda il logo della Mercedes-Benz)



I tre vettori hanno ugual norma k (parametro che assumendo valori diversi individua frames MB con proprietà diverse):

$u_1=k(0,1)$, $u_2=k(-\cos\pi/6, -\sin\pi/6)$, $u_3=k(\cos\pi/6, -\sin\pi/6)$ (25)

per k=1 la norma è unitaria (ma non è il caso più interessante).
Un generico vettore v=(a,b) del piano forma con i vettori u_1,u_2,u_3 i prodotti interni

$c_1= <v, u_1>= kb$, $c_2=<v, u_2>= -k(a \cos\pi/6+b \sin\pi/6)$,
$c_3=<v, u_3>=k(a \cos\pi/6-b \sin\pi/6)$ (26)

L'energia del vettore dei coefficienti risulta con pochi calcoli

$$c_1^2 + c_1^2 + c_1^2 = \frac{3}{2}k^2\left(a^2+b\right) = \frac{3}{2}k^2\|v\|^2 = A\|v\|^2 \qquad (27)$$

cioè la terna è un tight frame con $A=(3/2)k^2$ e norma uguale.

1) Se imponiamo k=1, cioè che i vettori siano unitari, allora A=3/2 misura la ridondanza del frame rispetto alla base: tre vettori dipendenti anziché due indipendenti.
2) Se invece imponiamo $k^2=2/3$ allora A=1 e vale il teorema di Parseval per la conservazione dell'energia, come nelle basi ortonormali. Si noti tuttavia che l'informazione distribuita sui coefficienti è ridondante perché ne bastano due qualunque per ricostruire il segnale e e la sua informazione. Ciò ovviamente non succede nelle basi ortonormali.

Per il MB frame troviamo con qualche calcolo che il frame duale di è $\tilde{u}_i = u_i/A$ (i=1,2,3). Questo risultato è valido per tutti i tight frames. Lo sviluppo del vettore v in un tight frame di M vettori è

$$v = \frac{1}{A}\sum_n < v, u_n > u_n\,, \quad (n=1....M) \qquad (28)$$

e somiglia allo sviluppo in basi ortonormali (identica espressione se A=1, cioè per vettori unitari) Tuttavia i vettori del frame non sono indipendenti!.

2.4. Comportamento rispetto al rumore e alla quantizzazione.

I coefficienti c_i dello sviluppo in frames sono in grado di attenuare (in media quadratica) il rumore additivo che proviene da molte operazioni di elaborazione. Ad esempio, quando il segnale espresso dai coefficienti viene quantizzato si introduce una correzione di approssimazione per portarlo al livello di quantizzazione più prossimo.Questa correzione viene espressa matematicamente come un rumore additivo n_i a media nulla (valore aspettato della variabile casuale n_i,: $E[n_i]=0$)e a varianza finita $E[n_i n_j]=\sigma^2 \delta_{ij}$ che si somma al coefficiente c_i.
Al solito considereremo un frame specifico, il frame MB con 3 vettori unitari per il quale vale lo sviluppo (28) sui 3 vettori del frame con A=2/3. Si osservi che nello sviluppo in frame di 3 vettori il rumore si somma a ciascuno dei 3 coefficienti correlati, mentre nello sviluppo con una base di due vettori si sarebbe sommato a ciascuno dei 2 coefficienti incorrelati.
Indicando con w il vettore imperturbato e con ŵ quello perturbato, l'errore di ricostruzione è

$$w - \hat{w} = \frac{2}{3}\sum_i < w, u_i > u_i - \frac{2}{3}\sum_i (< w, u_i > + n_i) u_i = -\frac{2}{3}\sum_i n_i u_i \qquad (29)$$

Valutiamo il valore quadratico medio aspettato MSE dell'errore (29). Poiché il vettore ha due componenti indipendenti (e quindi non correlate), sebbene ne abbia 3 dipendenti, appare logico attribuire le metà del valore aspettato dell'errore a ciascuna componente indipendente.

$$MSE = \frac{1}{2} E\left[\left\| w - \hat{w} \right\|^2\right] = \frac{1}{2} E\left[\left\| \frac{2}{3} \sum_i n_i u_i \right\|^2\right] = \sigma^2 \frac{2}{9} \left\| \sum_i u_i \right\|^2 = \frac{2}{9} \sigma^2 \quad (30)$$

(avendo scelto vettori unitari la sommatoria al penultimo membro vale 3). Dunque se si ricavano 2 componenti indipendenti dai 3 coefficienti con rumore σ^2 il valore per componente indipendente è i 2/9 di quello portato dai coefficienti correlati. Ciò esprime la maggiore robustezza del frame rispetto alla base di fronte al rumore.

3. CONCLUSIONI

Abbiamo illustrato come nasca la necessità di sviluppare entità vettoriali in insiemi di vettori ridondanti anziché in basi ortonormali: nasce per recuperare eventuali perdite di informazione. I frames sono insiemi vettoriali ridondanti limitati sia inferiormente che superiormente "in energia". Non solo essi permettono di recuperare l'informazione persa, ma possono essere più resistenti al rumore rispetto alle basi. Inoltre per alcuni frames (tight frames) la procedura di analisi e sintesi è formalmente uguale a quella consueta delle basi.

BIBLIOGRAFIA

La bibliografia sui frames è divenuta enorme negli ultimi dieci anni ed una lunga rassegna bibliografica sarebbe di scarsa utilità. Meglio è citare un paio di lavori di rassegna scientifica che a loro volta citino molti lavori specifici. L'autore non ha incontrato lavori di rassegna in italiano (sicuramente esistono delle tesi di dottorato, ma di difficile reperibilità).

[1] Casazza P.G. , *The art of frame theory*, Taiwanese J. of Math **4**, Taiwan, 2000, pagg.129-201.
Christensen Ole, *Modern Mathematical Models, Methods and Algorithms for Real World Systems,* New Dehli, Anamaya Publishers, 2007, pagg.152-188.

Sulle serie armoniche generalizzate

Carmen Carano[1]

Sunto: In questo lavoro, partendo dagli sviluppi in serie di Fourier delle funzioni y = x^s, con *s* numero intero pari, si ottiene una formula ricorsiva per il calcolo della somma della serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

Abstract: In this work, starting from the development in series of Fourier of the functions y = x^s, with *s* an even integer number, we obtain a recursive formula for the computation of the sum of the generalized harmonic series $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

Parole chiave: funzione pari, funzione dispari, serie di funzioni, prolungamento periodico, serie trigonometrica, serie di Fourier, sviluppo in serie di Fourier.

1. Cenni sulla serie di Fourier

Data una funzione f(x) periodica, di periodo 2π e integrabile nell'intervallo [-π;π], si definisce serie di Fourier di f(x) la serie trigonometrica:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n sen(nx))$$

---

[1] Istituto Tecnico Industriale "G. Marconi" - Campobasso.
e-mail: c.carano@tiscali.it

in cui:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)dx$$

con n =1, 2, 3,……….

La serie di Fourier di una funzione $f(x)$ converge e ha come somma proprio la $f(x)$ *(quindi tale funzione può essere rappresentata mediante la sua serie di Fourier),* se sono verificate le ipotesi del teorema di Dirichlet.

Il teorema di Dirichlet sulla sviluppabilità di una funzione in serie di Fourier afferma che se $f(x)$ è una funzione periodica di periodo 2π, continua a tratti[2] nell'intervallo $[-\pi;\pi]$ e se tale intervallo può essere suddiviso in un numero finito di intervalli in ciascuno dei quali $f(x)$ è monotona, allora la serie di Fourier di $f(x)$ è convergente per ogni $x \in$ R e la somma $\hat{f}(x)$ della serie nell'intervallo $[-\pi;\pi]$ è così definita: $\hat{f}(x)$ = $f(x)$ nei punti x$\in]-\pi;\pi[$, $\hat{f}(x)$ uguale alla semisomma dei limiti sinistro e destro della $f(x)$ nei punti di discontinuità dell'intervallo $]-\pi;\pi[$, $\hat{f}(x)$ uguale alla semisomma dei limiti della $f(x)$ per x che tende a $-\pi$ da destra e per x che tende a π da sinistra.

2. Sviluppo in serie di Fourier dei prolungamenti periodici delle funzioni y = x^s (con s numero intero pari) definite in $[-\pi;\pi]$

[2] Una funzione si dice continua a tratti in un intervallo, se in esso è continua o ha al massimo un numero finito di punti di discontinuità di prima o terza specie.

I prolungamenti periodici delle funzioni $y = x^s$ (con s numero intero pari), definite nell'intervallo [-π ; π], verificano le condizioni del teorema di Dirichlet e ognuno di essi coincide, per ogni x, con la somma della sua serie di Fourier (non ci sono punti di discontinuità e $\hat{f}(x) = f(x)$ anche in $-\pi$ e in π, essendo $\hat{f}(\pm\pi) = f(\pm\pi) = \pi^s$).

I coefficienti di Fourier di tali funzioni, dato che x^s e $x^s \cdot \cos(nx)$ sono pari e $x^s \cdot sen(nx)$ è dispari, sono:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^s dx \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^s \cos(nx) dx \qquad b_n = 0$$

con n =1, 2, 3,……….

3. Sviluppo in serie di Fourier dei prolungamenti periodici delle funzioni y = x^2, y = x^4, y = x^6, y = x^8, definite in [-π ; π] e calcolo delle somme delle serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^8}$

- **y = x^2**

I coefficienti di Fourier del prolungamento periodico di **y = x^2**, definita in [-π ; π], sono:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2 sen(nx)}{n} + \frac{2x\cos(nx)}{n^2} - \frac{2sen(nx)}{n^3}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\pi\cos(n\pi)}{n^2} = \frac{4\cos(n\pi)}{n^2}$$

Sarà quindi per ogni x:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4\cos(n\pi)}{n^2} \cdot \cos(nx)$$

Per $x = \pm\pi$ risulterà:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2} \cdot (\cos(n\pi))^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

da cui si ricava facilmente che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- **$y = x^4$**

I coefficienti di Fourier del prolungamento periodico di **$y = x^4$**, definita in $[-\pi ; \pi]$, sono:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^4 dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^\pi = \frac{2}{5} \pi^4$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^4 \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^4 sen(nx)}{n} + \frac{4x^3 \cos(nx)}{n^2} - \frac{12x^2 sen(nx)}{n^3} + \right.$$

$$\left. - \frac{24x\cos(nx)}{n^4} + \frac{24 sen(nx)}{n^5} \right]_0^\pi =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{4\pi^3 \cos(n\pi)}{n^2} - \frac{24\pi\cos(n\pi)}{n^4} \right] = \frac{8\pi^2 \cos(n\pi)}{n^2} - \frac{48\cos(n\pi)}{n^4}$$

Sarà quindi, per ogni x:

$$x^4 = \frac{1}{5}\pi^4 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{8\pi^2}{n^2} - \frac{48}{n^4}\right)\cos(n\pi)\cdot\cos(nx)\right)$$

Per $x = \pm\pi$ risulterà:

$$\pi^4 = \frac{1}{5}\pi^4 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{8\pi^2}{n^2} - \frac{48}{n^4}\right)(\cos(n\pi))^2\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\pi^4 + 8\pi^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - 48\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = = \frac{1}{5}\pi^4 + 8\pi^2\cdot\frac{\pi^2}{6} - 48\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$$

da cui si ricava facilmente che

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

- **y = x⁶**

I coefficienti di Fourier del prolungamento periodico di **y = x⁶**, definita in [- π ; π], sono:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^6 dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{7}\pi^6$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^6\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^6 sen(nx)}{n} + \frac{6x^5\cos(nx)}{n^2} - \frac{30x^4 sen(nx)}{n^3} + \right.$$

$$\left. - \frac{120x^3\cos(nx)}{n^4} + \frac{360x^2 sen(nx)}{n^5} + \frac{720x\cos(nx)}{n^6} - \frac{720 sen(nx)}{n^7}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \left(\frac{12\pi^4}{n^2} - \frac{240\pi^2}{n^4} + \frac{1440}{n^6}\right)\cdot\cos(n\pi)$$

Sarà quindi per ogni *x*:

$$x^6 = \frac{1}{7}\pi^6 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{12\pi^4}{n^2} - \frac{240\pi^2}{n^4} + \frac{1440}{n^6}\right)\cos(n\pi)\cdot\cos(nx)\right)$$

Per $x = \pm\pi$ sarà quindi:

$$\pi^6 = \frac{1}{7}\pi^6 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{12\pi^4}{n^2} - \frac{240\pi^2}{n^4} + \frac{1440}{n^6}\right)(\cos(n\pi))^2\right) =$$

$$= \frac{1}{7}\pi^6 + 12\pi^4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - 240\pi^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} + 1440\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} =$$

$$= \frac{1}{7}\pi^6 + 12\pi^4\cdot\frac{\pi^2}{6} - 240\pi^2\cdot\frac{\pi^4}{90} + 1440\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}$$

da cui si ricava facilmente che

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

- **$y = x^8$**

I coefficienti di Fourier del prolungamento periodico di $\mathbf{y = x^8}$, definita in $[-\pi;\pi]$, sono:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^8 dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^9}{9}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{9}\pi^8$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^8 \cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^8 sen(nx)}{n} + \frac{8x^7\cos(nx)}{n^2} - \frac{56x^6 sen(nx)}{n^3} + \right.$$

$$-\frac{336x^5\cos(nx)}{n^4} + \frac{1680x^4 sen(nx)}{n^5} + \frac{6720x^3\cos(nx)}{n^6} - \frac{20160x^2 sen(nx)}{n^7} +$$

$$\left. -\frac{40320x\cos(nx)}{n^8} + \frac{40320 sen(nx)}{n^9}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{8\pi^7}{n^2} - \frac{336\pi^5}{n^4} + \frac{6720\pi^3}{n^6} - \frac{40320\pi}{n^8}\right)\cdot\cos(n\pi) =$$

$$= \left(\frac{16\pi^6}{n^2} - \frac{672\pi^4}{n^4} + \frac{13440\pi^2}{n^6} - \frac{80640}{n^8}\right)\cdot\cos(n\pi)$$

Sarà quindi per ogni x:

$$x^8 = \frac{1}{9}\pi^8 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{16\pi^6}{n^2} - \frac{672\pi^4}{n^4} + \frac{13440\pi^2}{n^6} - \frac{80640}{n^8}\right)\cos(n\pi)\cdot\cos(nx)\right)$$

Per $x = \pm\pi$ risulterà:

$$\pi^8 = \frac{1}{9}\pi^8 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{16\pi^6}{n^2} - \frac{672\pi^4}{n^4} + \frac{13440\pi^2}{n^6} - \frac{80640}{n^8}\right)(\cos(n\pi)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\pi^8 + 16\pi^6\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - 672\pi^4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} + 13440\pi^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} - 80640\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^8} =$$

$$= \frac{1}{9}\pi^8 + 16\pi^6\cdot\frac{\pi^2}{6} - 672\pi^4\cdot\frac{\pi^4}{90} + 13440\cdot\frac{\pi^6}{945} - 80640\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^8}$$

da cui si ricava facilmente che

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}$$

4. Formula ricorsiva per il calcolo della somma della generica serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$ con s intero positivo pari.

In generale, i coefficienti di Fourier del prolungamento periodico di **y = x^s**, definita in [- π ; π], con *s* intero positivo pari, sono:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^s dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^{s+1}}{s+1}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{s+1}\pi^s$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^s \cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^s sen(nx)}{n} + \frac{sx^{s-1}\cos(nx)}{n^2} - \frac{s(s-1)x^{s-2}sen(nx)}{n^3}\right.$$

$$\left. - \frac{s(s-1)(s-2)x^{s-3}\cos(nx)}{n^4} + ... + (-1)^{\frac{s}{2}-1}\frac{s!x\cos(nx)}{n^s} + (-1)^{\frac{s}{2}}\frac{s!\cdot sen(nx)}{n^{s+1}}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{s\pi^{s-1}}{n^2} - \frac{s(s-1)(s-2)\pi^{s-3}}{n^4} + \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)\pi^{s-5}}{n^6} + ...\right.$$

$$\left. .... \frac{(-1)^{\frac{s}{2}-1}\cdot s!\pi}{n^s}\right]\cdot\cos(n\pi)$$

Sarà quindi per ogni *x*:

$$x^s = \frac{\pi^s}{s+1} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{\pi}\left[\frac{s\pi^{s-1}}{n^2} - \frac{s(s-1)(s-2)\pi^{s-3}}{n^4} + \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)\pi^{s-5}}{n^6} - ....\right.$$

$$\left. .... + \frac{(-1)^{\frac{s}{2}-1} s!\pi}{n^s}\right]\cdot\cos(n\pi)\cos(nx)$$

Per $x = \pm\pi$:

$$\pi^s = \frac{\pi^s}{s+1} + \frac{2}{\pi}\left(s\pi^{s-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - s(s-1)(s-2)\pi^{s-3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} + \right.$$

$$\left. + s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)\pi^{s-5}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{\frac{s}{2}-1} s!\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}\right)$$

$$\pi^s = \frac{\pi^s}{s+1} + 2s\pi^{s-2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - 2s(s-1)(s-2)\pi^{s-4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} +$$

$$+2\, s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)\pi^{s-6}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2(-1)^{\frac{s}{2}-1} s!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$$

Risulterà quindi:

$$2(-1)^{\frac{s}{2}-1} s!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s} = \pi^s - \frac{\pi^s}{s+1} - 2s\pi^{s-2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} + 2s(s-1)(s-2)\pi^{s-4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} +$$

$$- 2s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)\pi^{s-6}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} + \ldots 2s(s-1)(s-2)..(s-(s-4))\pi^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{s-2}}$$

Da cui:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s} = (-1)^{\frac{s}{2}-1}\left(\frac{\pi^s s}{2(s+1)!} + \sum_{i=1}^{\frac{s}{2}-1}(-1)^i\left(\frac{\pi^{s-2i}}{(s-2i+1)!}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2i}}\right)\right)$$

BIBLIOGRAFIA

1) L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, Losanna, 1748.

2) L. Euler, *Opera omnia*, v. XIV.

3) J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Paris, 1822.

4) G. L. Dirichlet, *Sur la convergence des séries trigonométrique*, Jour. Für Math., IV (1828).

5) G. Scorza Dragoni, *Elementi di analisi matematica*, v. 3, Cedam, Padova, 1969.

6) M. Kline, *Storia del pensiero matematico*, v. I – II, Einaudi, Torino, 1991.

La successione 6174

Enzo Barone[1]

Sunto : In questo articolo presentiamo alcune interessanti proprietà legate alla rappresentazione decimale dei numeri naturali.

Abstract: In this paper we show some interesting properties connected with the decimal representation of the natural numbers.

Parole chiave: numeri naturali, rappresentazione decimale.

1. Introduzione.

Nel 1949 il matematico indiano D. R. Kaprekar presentò una curiosa proprietà legata ai numeri naturali che nell'usuale rappresentazione decimale presentano 4 cifre. Vediamo di che si tratta. Si parte con un numero naturale qualunque X_0 di 4 cifre non tutte uguali, per esempio 8921, e si seguono le seguenti regole per costruire una successione:

1. si ordinano le cifre in modo decrescente e si forma quindi un nuovo numero (nel caso di $X_0 = 8921$, si ottiene 9821);
2. si considera il numero che si ottiene ordinando le cifre di X_0 in modo crescente e lo si sottrae dal numero ottenuto al passo 1 (nel caso di $X_0= 8921$, si ottiene 9821-1289 = 8532). Il numero così ottenuto è il secondo numero della successione, cioè X_1.

Quindi per costruire la successione si procede con le stesse regole dei passi precedenti.

Si afferma che dopo un numero finito di passi si arriva al numero 6174; e a quel punto la successione diviene costante. Infatti, si ha: 7641-1467 = 6174.

---

[1] Dipartimento di matematica "E. De Giorni", Università del Salento, 731000 Lecce
lorenzo.barone@unile.it

L'argomento è stato considerato da molti autori nel corso degli anni, anche nel caso di un numero di cifre diverso da 4; però non sempre i risultati sono di questo stesso tipo.
Noi riprendiamo la questione sia perché la riteniamo significativa per mostrare ai ragazzi delle scuole medie una utilizzazione di un concetto di base: **la rappresentazione posizionale dei numeri**; sia perché questo ci sembra un esempio significativo di attività di ricerca didattica.
Qui mostriamo un metodo di semplificazione dell'attività legata alla proprietà trattata, già adoperato in [1]. Inoltre, usando questo "metodo semplificato", evidenziamo in modo completo il comportamento nei casi di numeri con 2, 3, 4 e 5 cifre. Come si vedrà, il caso con 3 cifre risulta analogo a quello con 4 cifre, mentre quelli con 2 e con 5 cifre risultano difformi.
Il modo di costruire una successione ricordato precedentemente lo chiameremo ***procedura di Krapekar***.
Nella procedura presentata il numero 6174 è detto nucleo. In generale si chiama nucleo di quel tipo di procedura, qualunque sia il numero di cifre su cui essa è applicata, un numero ***n*** dopo il quale la successione si "stabilizza" su di un valore ***m***, ed ***n*** è il risultato della sottrazione relativa al punto 2. dell'introduzione.
In [4] Stefano Frara presenta un metodo, dovuto a Malcolm Lines, in cui si fa vedere che per provare che nel caso di 4 cifre 6174 è l'unico nucleo ci si può ridurre ad esaminare solo 30 numeri.

2. La spiegazione del "metodo semplificato".

Se scriviamo 9821 come $9\cdot 10^3+8\cdot 10^2+2\cdot 10+1$ e facciamo lo stesso per 1289, la differenza 9821-1289 si presenterà nelle forma

$$(9-1)\cdot 10^3+(8-2)\cdot 10^2-\left[\ (8-2)\cdot 10+(9-1)\ \right]=8600-68$$

In definitiva, nella sottrazione 9821-1289, a entrambe le due cifre situate su di una stessa colonna si sottrae la più piccola di esse, senza che il risultato della sottrazione cambi. Però in tal modo le prime due cifre del sottraendo si annullano.
È chiaro che il discorso fatto per 9821 può essere trasferito a qualsiasi altro numero di 4 cifre. Perciò si può partire esclusivamente da numeri del tipo AB00, con B ≤ A. Questi numeri sono solo 54, con un notevo-

le risparmio rispetto alla totalità di numeri di 4 cifre, anche nel caso di numeri a cifre (quasi) decrescenti.
Alcuni autori hanno condotto i loro ragionamenti sulla base del fatto che ogni differenza che entra in gioco – riguardando due numeri che hanno le stesse cifre (con lo stesso numero di presenze per ogni cifra) – è un multiplo di 9. Ciò grazie a semplici proprietà di aritmetica modulare di modulo 9. Perciò il discorso può essere affrontato partendo dai numeri a 4 cifre che sono multipli di 9. Ma in tal caso il risparmio ottenuto è notevolmente inferiore.
Se analizziamo il comportamento dei 54 numeri a cui abbiamo deciso di riferirci, avremo lo schema riportato qui sotto.

41, 61, 94, 96

22, 82, 88

75 52, 85 51, 95

50 60 30, 80 33, 73, 77

10 54, 65 32, 72, 83, 87 55 53

90 20 44, 64, 66 91, 11, 99 40, 70

21, 81, 92, 98 71, 31, 93, 97 43, 63, 74, 76

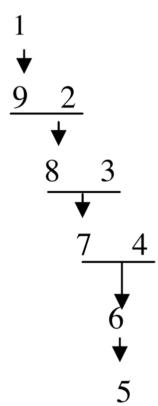
86 84 42

62

Tale schema rappresenta un grafo. I numeri collocati sopra uno stesso segmento orizzontale sono nodi del grafo aventi come corrispondente il numero che è raggiunto dalla freccia che parte dal predetto segmento orizzontale. Come si vede, il grafo stabilisce una relazione d'ordine (non totale) fra quei 54 numeri e per tale relazione 62 è il più grande elemento. Può essere un utile esercizio chiedere agli alunni quali sono gli elementi confrontabili, i maggioranti ed i minoranti di un dato sottoinsieme, ecc.

3. Generalizzazioni ed osservazioni.

Evidentemente il discorso funziona anche partendo da un numero diverso di cifre, però non è detto che in ogni caso ci sia un nucleo. Cioè, in ogni caso si costruisce un grafo, ma in generale non è detto che esso esprima una relazione d'ordine.
Se si parte con un numero di 3 cifre, si vede subito che il nucleo a cui si arriva dopo pochi passi è 495. In questo caso possiamo limitarci a esaminare i numeri del tipo A00, che sono in tutto 9. È chiaro che 495 corrisponde a 500-5.
Ecco qui sotto il grafo (*semplificato*) relativo al caso di 3 cifre

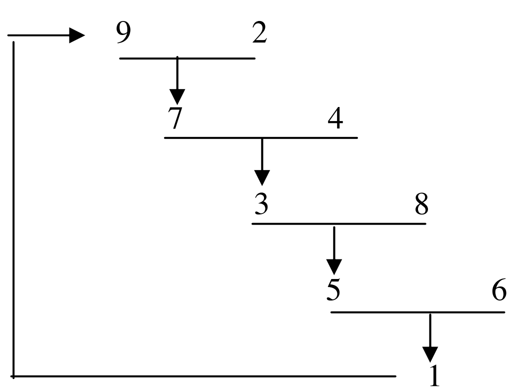


Come si vede, si potrebbe continuare ad indagare sull'argomento.
Yutaka Nishiyama in [1], servendosi di un computer, ha esaminato i vari casi fino a 10 cifre e ne è scaturita la tabella sottostante.

Numero di cifre	nuclei
2	nessuno
3	495
4	6174
5	nessuno
6	549945, 631764
7	nessuno
8	63317664, 97508421
9	554999445, 864197532
10	6333176664, 9753086421, 9975084201

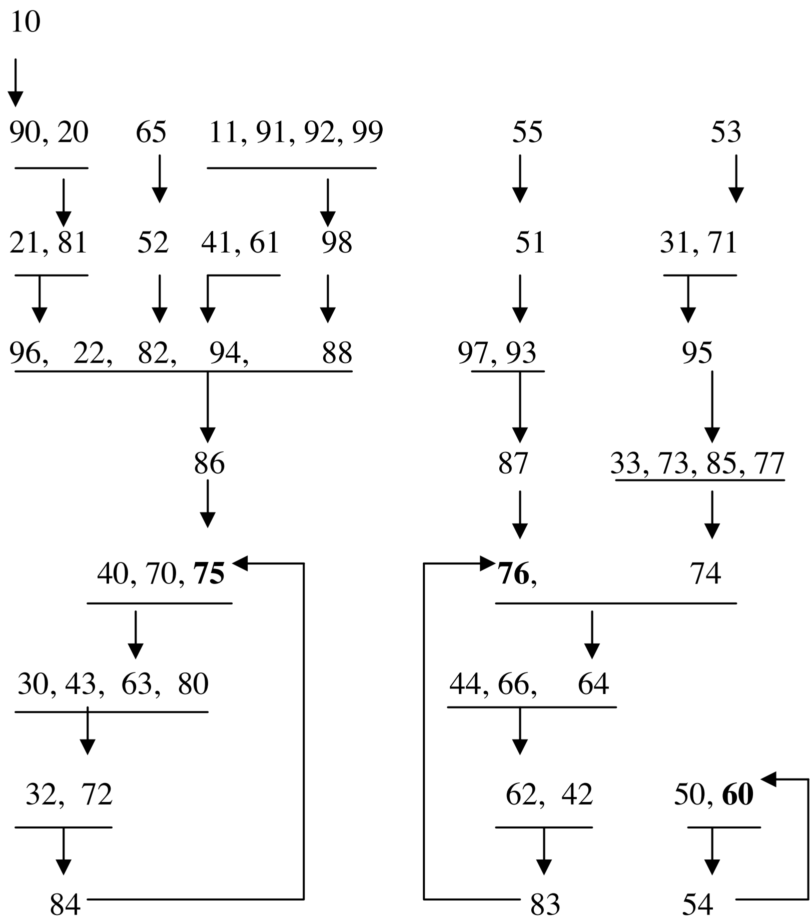
Come si vede dalla tabella, nei casi di 2, 5 e 7 cifre non c'è alcun nucleo. Ciò significa che il grafo associato alla procedura di Kaprekar presenta dei cicli.
È facile controllare che nel caso di 2 e di 5 cifre i grafi ottenuti sono rispettivamente quelli riportati successivamente. Come si vedrà il grafo relativo a 5 cifre ha ben tre componeti connesse. Per realizzarlo basta tener presente che tutti i numeri con 5 cifre, dopo l'applicazione dei due passi (per costruire la successione) sono riconducibili a numeri del tipo AB000 - BA e quindi ai numeri AB con A ≥ B. Pertanto anche ora, come nel caso di 4 cifre, i numeri da esaminare sono 54: si parte da 99, 98,..,90,88, 87, .., 80, 77, …, 11, 10. Si vede come si hanno tre cicli: (75, 63, 72, 84, 75), (76, 64, 62, 83, 76) e (60, 54, 60).
Il grafo relativo al caso di 7 cifre non è facile da realizzare con "carta e penna". Lo lasciamo a chi volesse togliersi la curiosità di ricavarlo, magari trovando qualche scorciatoia per determinarlo. Però si può presumere che esso presenti più di una componente, come nel caso di 5 cifre.

Ecco il grafo (*semplificato*) relativo al caso di 2 cifre.



Nel precedente grafo è presente un ciclo nel quale "va a cadere" ogni successione, ma continua ad essere connesso.

Ed ecco il grafo (*semplificato*) relativo al caso di 5 cifre.



Come si vede ci sono tre componenti connesse e tre cicli.
Concludiamo osservando che non è affatto chiaro perché in alcuni casi esistono dei nuclei ed in altri casi esistono dei cicli. Questo può essere un suggerimento per una ricerca più approfondita. Ci sembra però evidente che quanto esposto può essere una proposta didattica divertente ed alternativa ai soliti “esercizi”, certamente necessari, ma sicuramente “noiosi”.

BIBLIO/SITOGRAFIA

[1] Yutaka Nishiyama:
http://plus.maths.org/issue38/features/nishiyama/
[2] http://mathworld.wolfram.com/KaprekarRoutine.html
[3] http://xoomer.alice.it/vannigor/kaprecar.htm
[4] Stefano Frara:
http://www2.polito.it/didattica/polymath/htmlS/Interventi/Articoli/6174/6174.htm

Il diagramma d’argilla, geometrico risolvente a modulo quadrato, che governava l’intera arte algebrica degli antichi scribi. Un paradigma che ha aperto le porte alla Cultura Matematica delle Civiltà arcaiche.

Aldo Bonet*

Sunto: Da uno studio iniziato nel 1989, si percorre una strada conclusiva che tende a dimostrare l’esistenza di un diagramma d’argilla a modulo quadrato, che governava l’intera arte algebrica delle Civiltà arcaiche, seguendo l’analisi dello studio dei problemi e delle identità notevoli rinvenuti sulle tavolette cuneiformi e connettendoli con le matematiche delle Civiltà potamiche e talassiche.

Abstract: A study begun in 1989, you take a conclusive way that tends to prove the existence of a plot of clay to form the square, which ruled the whole art of algebraic archaic civilization, following the analysis of the study of the problems and the identities found on major cuneiform tablets and connect with the mathematics of Civilization Potamia and Thalasso.

parole chiavi: introduzione, forma standard, il criterio di scivolamento o rotazione, la tassellatura con mattoni, due osservazioni interessanti, due ipotesi conclusive, i due tesori della geometria, dall’Oriente a Pitagora, da Pitagora a Euclide.

* aldo@storiadellamatematica.it

1. Introduzione

Nel dicembre del 1989, sulla Rivista L'Educazione Matematica, mi fu pubblicato un mio lavoro che formulava un'ipotesi di un probabile e unico metodo algebrico – geometrico che, a mio parere, consentiva ai babilonesi la visualizzazione delle identità notevoli e la conseguente risoluzione dei loro problemi rinvenuti sulle tavolette cuneiformi. **(1)**
Un lavoro ipotetico che si basava sulla possibile ricostruzione geometrica del principio della semisomma e della semidifferenza **(2)** in uso presso i babilonesi, nato probabilmente dall'incrocio di due cordicelle di allineamento poste sopra una sezione a modulo quadrato e di seguito perfezionato probabilmente dall'osservazione di due cerchi concentrici inscritti nei loro rispettivi quadrati e che ripropongo qui in una forma geometrica più in stile con la geometria mesopotamica. **(3) (vedere allegato 1)**
Un principio che poi ho conseguentemente applicato ad un diagramma che si è spontaneamente concretizzato con un'apertura a compasso, consentendomi di procedere facilmente, sulla base della medesima logica deduttiva, da una forma iniziale, monodimensionale o lineare, a quella consecutiva, bidimensionale e tridimensionale, permettendomi così di realizzare un metodo generale di risoluzione e unico per i problemi di 1°, 2° e 3° grado, che avevo ipotizzato su due possibili strade distinte, ma fra loro equivalenti:

- Una, ampiamente spiegata nella parte iniziale e in forma prevalente nella pubblicazione sopracitata del 1989, percorsa con lo sviluppo, mediante apertura a compasso, di un diagramma triangolare retto o prismatico risolvente, che prevede la sovrapposizione delle superfici o dei volumi, realizzato per giungere a rafforzare la nota costruzione geometrica nello spazio ipotizzata dallo Storico Matematico S.J. Lurje **(4)**.
- L'altra, introdotta nella stessa pubblicazione sopracitata **(5)**, percorsa con lo sviluppo mediante un'apertura dimensionale più geometrico - elementare (lineare, quadrata, cubica), di un diagramma **(6)** quadrangolare retto o cubico risolvente ed equivalente al precedente, che non prevede la sovrapposizione delle superfici o dei volumi ma che giunge esattamente alle stesse conclusioni se comparato con gli stessi problemi, visualizzando inoltre le stesse identità algebriche sfruttate dallo scriba e ravvisabili sui testi babilonesi. Due strade, solo apparentemente distinte, dove l'una, può rappresentare probabilmente l'evoluzione dell'altra, ma entrambe collegate.

Quest'ultima strada, già istintivamente intravista nel 1991, nella sua potenzialità, dal Professor Bruno Rizzi che mi esortò a intraprendere, è quella che con questo lavoro desidero approfondire e integrare per completezza conclusiva e chiarificatrice.
Riesamino le identità notevoli e i problemi noti nella letteratura algebrica babilonese, inserendo delle novità mediante nuove ipotesi e osservazioni più approfondite alle congetture già contenute nella pubblicazione sopracitata del 1989, elaborate inoltre alla luce delle recenti pubblicazioni in materia **(7).**
Analizzo ove necessario, con personali interpretazioni, la schematicità dei testi babilonesi, investigando sul senso logico delle terminologie usate dallo scriba e tradotte direttamente dagli specialisti dalle tavolette cuneiformi a contenuto matematico riferite ai problemi di 2° grado e le raffronto schematicamente col diagramma d'argilla quadratico risolvente a modulo quadrato, che si identifica con quello esposto nella mia pubblicazione precedentemente citata **(8)** e che, come avremo modo di vedere, in forma introduttiva nel presente articolo, risulterà alla base di una tecnica algebrica degli antichi scribi per la soluzione di molti problemi rinvenuti sulle tavolette cuneiformi e presente inoltre nelle arcaiche Civiltà: Cinese, Egizia e Indiana, **(9)** per la conseguente dimostrazione empirica, da me ipotizzata con l'ausilio di mattoni, dell'identità notevole ed equivalente al noto "Teorema di Pitagora" a dimostrazione, che il noto "Teorema" non apparteneva a Pitagora ma molto probabilmente, ad un'unica e più vasta Civiltà Madre sopracitata. Infine, come vedremo, lo stesso diagramma contiene le note proposizioni algebriche estrapolate dai Pitagorici e sopravvissute sia negli Elementi di Euclide, sia nella matematica vedica indiana, sia nella cultura matematica islamica, mediante i diagrammi di Al-Khuwarizmi **(vedere allegato 2)**.
La tecnica algebrica degli antichi scribi, la ritroviamo ancora con la geometria pratica per gli artigiani di Abū l'Wafā' al-Būzğānī **(10)**. Probabilmente l'ultima testimonianza rimastaci di questo straordinario diagramma, sopravvive in un pavimento nel famoso palazzo della simmetria, d'arte moresca conosciuto come, l'Alhambra di Granada **(vedere allegato 3)**.
Il diagramma d'argilla, quadratico risolvente a modulo quadrato, prenderà realisticamente forma e corpo dall'analisi di problemi presenti nell'antica tavoletta babilonese contrassegnata come: AO 8862 **(11)**.

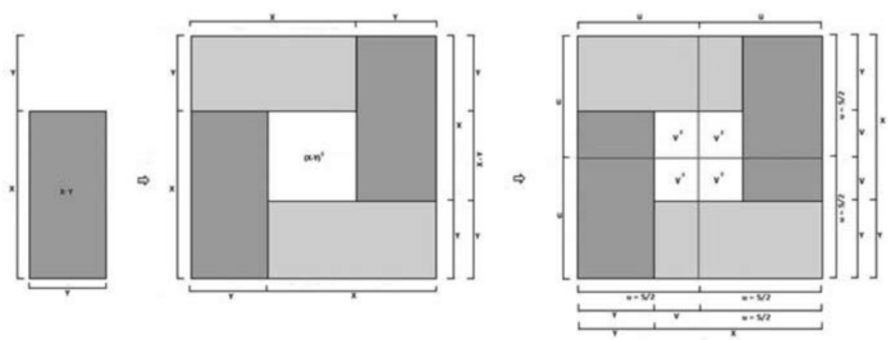
2. Forma standard o “normale”

Ci sono molti esempi di problemi quadratici più complessi **(12)** che i babilonesi riconducevano sempre ad una forma normale, come la chiamava Otto Neugebauer **(13)**.
Il problema esemplificativo della forma standard si può tradurre col sistema:

$XY = b \; ; \; X + Y = S.$

Una forma normale fatta di somma (o differenza) e prodotto a cui probabilmente, secondo la mia congettura, i babilonesi ricollegavano e basavano l’algoritmo dei loro problemi quadratici con la visualizzazione del diagramma geometrico seguente:

FASE 1 FASE 2 FASE 3



PROBLEMA: $X + Y = S; \; X \bullet Y = b$
IDENTITÀ: $(X+Y)^2-4XY = (X-Y)^2$
$4U^2 = 4XY + 4V^2$
$X = S/2 + V$
$Y = S/2 - V$

Fig. 1

Un diagramma, che si sviluppa fondamentalmente in tre probabili e consuete tappe (o fasi), che si possono riassumere nell’usuale procedimento operativo e necessarie alla risoluzione dei noti problemi babilonesi di 2° grado.
Fase 1. In questa fase si procede rendendo il problema omogeneo e razionale (quindi, nel nostro caso, visualizzando la superficie rettangolare

che geometricamente lo interpreta) per farlo entrare, come un corpo componente, nel diagramma che andrà successivamente costruito o imbastito nella fase 2.
Fase2. In questa fase, si procede al componimento del diagramma in argomento, con una forma simmetrica particolare, conosciuta nella nostra architettura come: "figura a modulo quadrato". Una sorta di composizione fatta con quattro superfici rettangolari identiche e preliminarmente quadruplicate col problema dato, incrociando perpendicolarmente, sia le superfici rettangolari, sia quindi, i medesimi e rispettivi lati di ognuna, mediante una disposizione contigua e alternata, "verticale–orizzontale" e sequenziale, dove la lunghezza esterna di ognuna si prolunga con la larghezza esterna dell'altra superficie consecutiva, mentre la larghezza interna di ognuna va a congiungersi con la lunghezza interna dell'altra consecutiva, imbastendo così un diagramma che mette in contatto i lati alterni dei singoli rettangoli, facendo in modo che si tengono reciprocamente fra loro **(14)**, concatenandosi così con un intreccio incrociato quadrangolare retto, in ordine circolare e con un senso, a piacere, orario o antiorario.
Un diagramma di straordinaria simmetria, **(15)** probabilmente ricavato e osservato, da qualche tecnico-artigiano babilonese (o sumero), nell'intento di studiare nuovi intrecci a mosaico o modelli in scala ridotta di costruzioni edili o semplici intrecci scaturiti da una posatura degli innumerevoli mattoni prodotti per le loro costruzioni urbane fortificate. Non ci sono documenti espliciti in proposito, ma gli esempi qui esposti, possono risultare utili a far intravvedere già nell'arte figurativa sumerica, una sensibile presa di coscienza verso questa forma geometrica, che avrebbe rievocato in una mente creativa, quel riflesso condizionato che sarebbe sbocciato facilmente verso un'immagine geometrica concretamente espressiva e imbastita, a modulo quadrato, mediante quattro mattoni o formelle rettangolari d'argilla **(16)**.
D'altra parte, la semplice costruzione a secco, di un modellino tridimensionale di una torre, per una cinta muraria, a base quadrata e cava nel suo interno, eretta con quattro mattoni rettangolari uguali per ogni strato, nel garantire stabilità e resistenza di legatura negli angoli (concetti costruttivi ben noti agli antichi babilonesi), richiede obbligatoriamente una posatura a sezione geometrica a modulo quadrato e sfalsata tra i vari strati, in modo che i giunti non siano uno sull'altro. Inoltre, anche una pavimentazione con mattoni rettangolari, disposta a quadrati concentrici, porta ad avere, nella posa centrale, una figura obbligatoria a modulo quadrato, identi-

ca al diagramma. Ritroviamo sezioni a modulo quadrato anche nelle prime costruzioni cinesi in mattoni risalenti al V secolo a.C. **(vedere allegati: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)**.
Fase 3. In quest'ultima fase si inserisce il principio della semisomma e della semidifferenza, posizionando semplicemente sul diagramma imbastito, la croce simmetrica, che lo fraziona in quattro parti uguali.
Una croce, scaturita probabilmente in modo fortuito, incrociando delle corde di allineamento, su una sezione geometrica a modulo quadrato, in fase di operazioni o progettazioni edili, ma che si ritrova o si intravvede spesso, come elemento appartenente ad uno stile grafico geometrico, direi famigliare alla stessa geometria matematica babilonese, riscontrabile sulla tavoletta B.M.15285 **(17)** del 1800 a.C. in cui si propongono dei problemi sul quadrato;

croci grafiche in posizione simmetrica
e perpendicolare ai lati delle figure
geometriche babilonesi

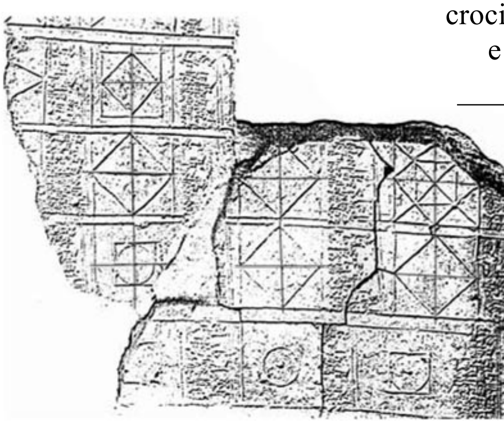


Fig. 2

una tavoletta che sarà inoltre, di supporto grafico correlativo con la matematica contenuta nei testi delle tavolette cuneiformi appartenenti allo stesso periodo e tradotte dagli specialisti.
La fase 3 di fig. 1 (o di fig. 8) correlandola con la stessa tavoletta sopracitata, la possiamo potenzialmente intravvedere con i problemi esposti e ipoteticamente riconducibili al supposto caso limite: "X = Y", in un linguaggio geometrico babilonese che risulterebbe facilmente comparabile ed eloquente.

problemi geometrici babilonesi riconducibili al supposto caso limite X = Y

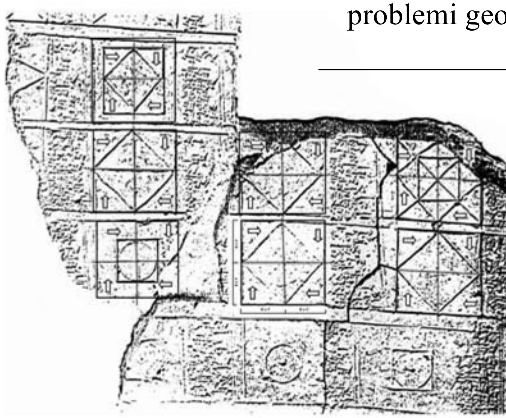


Fig. 3

Questa semplice croce, posta centralmente in modo simmetrico e perpendicolare ai lati del diagramma, visualizza sorprendentemente, sulla base del principio della semisomma e della semidifferenza, una regola unica di risoluzione per i problemi connessi con le superfici, ma soprattutto estensibile e valida in generale per la risoluzione dei problemi di 1°, 2° e 3° grado.
La croce di simmetria, (vedere fig. 1) in quell'esatta e perpendicolare posizione baricentrica al diagramma, individua automaticamente, in parti uguali e simmetriche, i quattro rispettivi quadrati della semisomma, $4[(X+Y)/2]^2$ e della semidifferenza $4[(X-Y)/2]^2$ e coincide sempre, come vedremo, quale linea di frazionamento (quello che fraziona il diagramma in quattro parti uguali) esplicata nella terminologia dello scriba e tradotta dagli specialisti col termini: "Tu frazionerai o tu dividi", che compare nei testi matematici rinvenuti nelle tavolette cuneiformi.
Questa semplice applicazione della croce simmetrica sul diagramma, ha prodotto probabilmente, un inaspettato e sorprendente strumento matematico algoritmico dotato di notevole potenzialità, unicità e polivalenza; paragonabile, per importanza, con l'altro strumento matematico in uso presso i Babilonesi cioè: l'abaco, con la sola differenza, che il diagramma veniva usato per visualizzare le identità e i procedimenti di risoluzione dei problemi anziché per effettuare le pure e semplici operazioni matematiche.
Le fasi 1 e 2 di fig. 2 sono in buona parte preliminari o di preparazione al problema, allo scopo di giungere ad imbastire il diagramma con la quadruplicazione del problema dato, onde poter posizionare in punti noti, sullo stesso, la croce simmetrica che lo fraziona.

La fase 3 è quella che, con l'applicazione del principio in argomento, mediante la croce simmetrica, sul diagramma, entra dritta al cuore del problema e che individua, prevalentemente, in ogni quarta parte dello stesso, nonché in quella immediatamente aderente o confinante, i necessari passaggi algebrici o quelli fondamentali rimanenti, per giungere alle grandezze lineari necessarie ed esplicate nella terminologia dello scriba col termine: "equilaterale", quindi alla soluzione o alle soluzioni desiderate, sfruttando l'identità che compare visualizzata sul diagramma **(18)**:

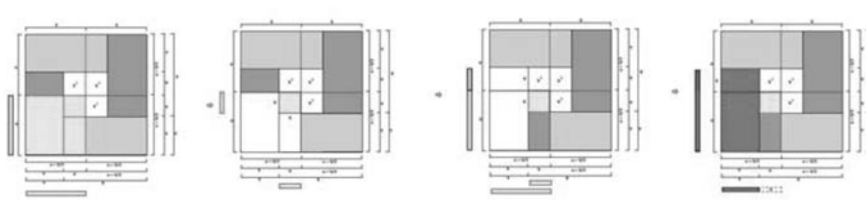


Fig. 4

$$[(X + Y)/2]^2 - XY = [(X - Y)/2]^2$$

Con: X= U+V; Y= U-V; **(19)** U = S/2 ; $V^2 = (S/2)^2 - b$

Notare come la superficie rettangolare, XY, in ogni quarta parte del diagramma, risulta facilmente individuata e computata con la forma gnomonica equivalente che, aggiunta al quadratino della semidifferenza, visualizza il completamento del quadrato della semisomma.

Il diagramma, con le sue fasi, di fig. 1 e fig 4, rappresenta un paradigma di base (o standard) per i problemi di 2° grado, intorno e all'interno del quale gravitano, tutti gli altri di ugual grado (o anche di grado superiore), ma soltanto più elaborati.
Queste fasi, visualizzate geometricamente, potevano essere, sia incise sulle tavolette d'argilla, sia (forse più facilmente e frequentemente) concretizzate con la realizzazione preliminare di vari pezzetti o frammenti geometrici d'argilla: quadrati, rettangoli, triangoli ecc. per il diagramma bidimensionale; cubi, parallelepipedi, prismi, ecc. per lo stesso diagramma ma sviluppato alla terza dimensione, componendo così a mosaico questa probabile tassellatura, sia nel piano, sia nello spazio, di un diagramma rispettivamente, quadratico o cubico, risolvente. **(20)**
Molti problemi, sono stati poi elaborati e impostati dai babilonesi, dalla forma normale di base a modulo quadrato **(21)**, a cui si riconducevano, in

crescenti gradi di difficoltà, con varie combinazioni geometrico - numeriche ma anche, di “grado dimensionale (o esponenziale)” diverso. **(22)**
Non dobbiamo dimenticare, che i babilonesi si sono dimostrati nella pratica, degli abili artigiani e costruttori edili, nonché dei veri contabili e questa tecnica algebrica di tassellatura a frammenti geometrici d’argilla, pur empirica e rudimentale, appare più collegata ad un programma di studio indirizzato agli scribi per diventare, nell’organizzazione statale, dei buoni e necessari tecnici specializzati nelle arti e nei mestieri e non finalizzata alla sola ricreazione dello spirito. Quindi, una tecnica ausiliaria ideale per preparare lo scriba, ad una maggiore confidenza con progettazioni tecniche, artigianali e artistiche nonché al computo del ragioniere.
Riassumendo, il diagramma geometrico risolvente si può suddividere in:

1) Diagramma lineare risolvente, che coincide con la dimostrazione del principio della semisomma e della semidifferenza (Allegato 1) e che raggruppa tutti i problemi di 1° grado.
2) Diagramma quadratico risolvente che raggruppa tutti i problemi di 2° grado (fig. 1 e fig.4) (oggetto principale del presente lavoro).
3) Diagramma cubico risolvente che raggruppa tutti i problemi di 3° grado. (Aldo Bonet L’Educazione Matematica, da pag 205 a pag. 212, del 3/12/1989)

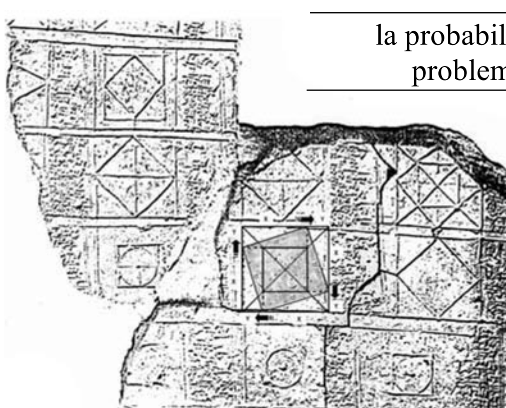
La soluzione di un problema quadratico, cubico o di grado superiore, consisteva quindi nel ridurlo gradualmente al diagramma inferiore precedente o ad un diagramma inferiore noto, che permetteva di giungere fino al diagramma lineare risolvente di base e che coincideva quindi, con la soluzione più semplice per le due grandezze incognite, le quali si configuravano nella condizione necessaria e sufficiente, solo quando era possibile ottenere a fianco della loro somma, anche la loro differenza o viceversa; **(23)** l’algoritmo era di conseguenza basato su un criterio a scatola, di chiusura dimensionale: “Cubico, quadratico e lineare”.
Nella fase 2 di fig. 1, osservando bene il diagramma quadratico risolvente, si può estrapolare e visualizzare l’identità algebrica:
(A) $(X+Y)^2 - (X-Y)^2 = 4XY$; presente anche nella proposizione II.8 degli Elementi di Euclide, nonché rilevabile sul Plimpton 322 utilizzata dai babilonesi per giungere al loro equivalente “teorema di Pitagora”**(24)**.
Nel Libro: Matematica i luoghi e i tempi vol 1 a cura di Bartocci e Odifreddi; a pag. 28 del capitolo: le origini, di Jens Høyrup leggiamo: ”e in più un altro degli enigmi matematici della tradizione laica (trovare i lati di due quadrati concentrici, quando l’area del nastro intermedio e la sua larghezza sono dati)”; un enigma matematico della tradizione laica, ma

come si vede, svelato e risolto con l'identità (A) soprindicata e visualizzata sul diagramma babilonese.
Notare come l'intera area occupata o interessata dal diagramma quadratico risolvente è maggiore di quella normalmente interessata dal problema quadruplicato e internamente collocato: $(X+Y)^2 > 4XY$.

3. Il criterio di scivolamento o rotazione del quadrato sul diagramma, che stava probabilmente alla base dei problemi del scivolamento del palo o della canna.

Se sviluppiamo la stessa identità (A) sopracitata, nella conseguente:
(B) $(X+Y)^2/2 + (X-Y)^2/2 = 4XY/2 + 2(X-Y)^2/2$, la ritroviamo nuovamente a pag. 16 dello stesso capitolo di Jens Høyrup quando dice: "Una tavoletta ci presenta un esempio più sofisticato di sapere geometrico senza utilità pratica: il fatto che un trapezio viene diviso a metà da una linea parallela alle basi il cui quadrato è la media aritmetica fra i quadrati di esse":

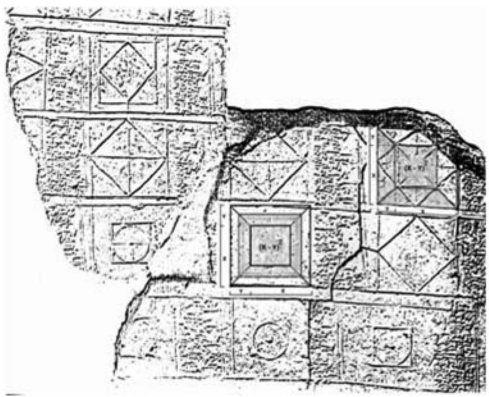
la probabile regola che stava alla base dei problemi del scivolamento della canna



rotazione o scivolamento del quadrato costruito sulla diagonale

Fig. 5

$$(X + Y)^2/2 + (X - Y)^2/2 = 2XY + (X - Y)^2 = d^2$$



superfici equivalenti al quadrato costruito sulla diagonale

vedere fig. 3 pag. 203 L'Educazione Matematica 3/12/1989

Fig. 6

Il quadrato medio aritmetico, non è altro che il quadrato costruito sulla "diagonale" del rettangolo equivalente al trapezio e contenuto nel diagramma quadratico risolvente, ovvero costruito sulla nostra più famigliare "ipotenusa".

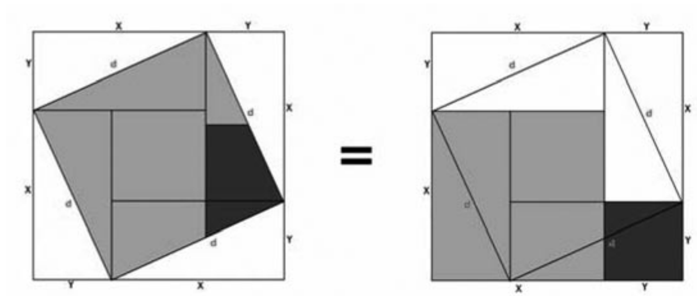
Se il quadrato (d^2), della fig. 5, lo facciamo ruotare o scivolare fino a posizionarsi, in modo concentrico e con i lati fra loro paralleli, s'interporrà matematicamente, per logica conseguenza,come in fig. 6, nella media aritmetica con i due rispettivi quadrati di riferimento, di area : $(X + Y)^2$; $(X - Y)^2$; una tecnica geometrica facilmente visualizzabile nella sua dinamicità, mediante tre elementi geometrici d'argilla fra loro sovrapposti e di forma quadrata **(25)**; un criterio empirico di base, che ha probabilmente ideato i noti problemi del scivolamento del palo o della canna.

4. La tassellatura con mattoni che ha generato una importante regola generale.

E' sufficiente, per una verifica algebrica, sviluppare il primo o il secondo membro dell'identità (B) sopracitata ed ottenere la somma dei quadrati costruiti sui "lati" del rettangolo, ovvero sui nostri e più famigliari "cateti": $X^2 + Y^2$; per i babilonesi era più facile giungere alla suddetta verifica geometrica, mediante la loro tecnica di tassellatura con il loro diagramma quadratico risolvente, opportunamente impilato nelle varie fasi dimostrative con mattoni rettangolari,mezzi mattoni rettangolari o triangolari, mattoni quadrati, mezzi quadrati, gnomoni ecc. **(vedere allegato 11)**.

Il criterio sopracitato, associato alla tecnica di tassellatura con mattoni ha generato probabilmente la seguente e importantissima regola contenuta nel diagramma:

REGOLA GENERALE BABILONESE DELLA RELAZIONE
TRA I LATI E LA DIAGONALE DEL RETTANGOLO



ovvero dell'equivalenza tra le superfici costruite sui lati e quella
costruita sulla diagonale del rettangolo, verificabile col criterio
della equicomposizione o equiscomposizione delle superfici

Fig. 7

(Notare la notevole analogia con la dimostrazione cinese per la medesima identità algebrico geometrica; consiglio di leggere il lavoro di Karine Chemla: "Matematica e cultura nella Cina antica" presente sul Libro "la Matematica" i luoghi e i tempi vol 1 a cura di Bartocci e Odifreddi, Einaudi 2007 nonché Paolo Zellini in "Gnomon una indagine sul numero" Adelphi edizioni 1999 pagg. 273, 274).

Questa è una regola generale (e non limitata a casi particolari) che ci fa ipotizzare due osservazioni interessanti:

5. Due osservazioni interessanti.

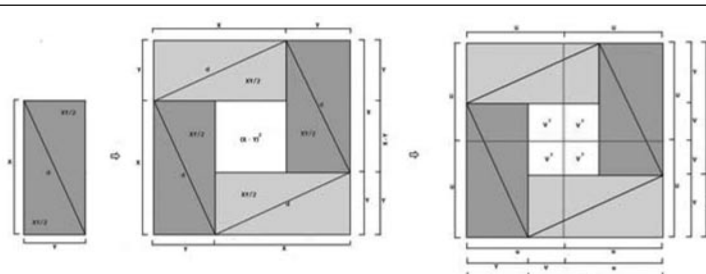
1) Il "Teorema di Pitagora"; una scoperta originale delle Civiltà arcaiche, avvenuta con il loro diagramma.

Il "Teorema di Pitagora" poteva essere stato così trovato indirettamente dai babilonesi probabilmente, almeno 1000 anni prima di Pitagora stesso **(26)**, tramite il diagramma quadratico risolvente, utilizzato per l'esclusiva ricerca delle soluzioni dei problemi di 2° grado, ma con una diversità algebrica più nella forma che nella sostanza, rispetto a quella di Pitagora storicamente a Lui attribuito e cioè: i "cateti" intesi così come noi li conosciamo, quali lati adiacenti all'angolo retto di un triangolo rettangolo, venivano elusi e interpretati dai babilonesi sempre e comunque come i lati del rettangolo di appartenenza, ovvero come le incognite di un problema di 2° grado da ricercare e quindi, come i lati di una superficie rettangolare anziché triangolare (Vedere Renè Taton in "Histoire Generale des sciences, La science Antique et Medievale " Vol 1, 1957 pagg.118 e 119).

E' interessante notare che anche gli indiani, nei Sulvasutra, conoscevano questa regola (ved. Carl B. Boyer in "Storia della Matematica" pag. 243).
Un problema legato alla Regola Generale Babilonese e connessioni con le altre Civiltà.
Un problema emblematico è quello della tavoletta Db_2-146 di cui a pag. 98 del Libro, Storia dell'Algebra, Silvio Maracchia, Liguori 2005 nonché a pag 257 del Libro di Jens Høyrup, Lengths, Widths, Surfaces, Springer 2002, che si costruisce con le fasi seguenti e dentro il solito diagramma quadratico risolvente.

Il problema, tradotto algebricamente, è il seguente: XY = 3/4; d = 5/4

FASE 1	FASE2	FASE 3



PROBLEMA: $XY = 3/4$; $d = 5/4$
IDENTITÀ: $d^2 = 2XY + (X-Y)^2$
$d^2 - 2XY = (X-Y)^2$
$d^2 + 2XY = (X+Y)^2$

Fig. 8

Nella fase 1 si razionalizza il problema, per inserirlo nella fase 2.
Nella fase2 si compone il diagramma a modulo quadrato come indicato per il precedentemente problema "standard" di Fig.1, dove si compiono, una prima serie di passaggi algebrici preliminari, schematizzati con le identità visualizzate e perfettamente correlati con quelli dello scriba, che portano a conoscere la differenza dei lati del rettangolo, riducendo il problema a quello tipo "differenza e prodotto" risolto conclusivamente, nella fase 3 successiva.
Nella fase3 si inserisce il principio in argomento, posizionando sullo stesso diagramma in punti noti, la croce simmetrica che lo fraziona in quattro parti uguali, semplificando l'individuazione dei rimanenti passaggi algebrici e che porta lo scriba alla soluzione lineare conclusiva desiderata, così come indicati nella tavoletta **(vedere allegato 12)**.
I calcoli mostrati dallo scriba per la verifica del problema, si possono perfettamente visualizzare con quanto abbiamo già verificato in precedenza, mediante lo stesso diagramma di cui alla regola fig.7, nonché in fig.9 e 10 che andremo successivamente a sviluppare.
Come conclusione a questo problema, è interessante osservare che le identità ravvisabili sul diagramma alla fig.8, sono le stesse elencate dall'anonimo esponente di una corrente matematica persiana del X secolo, autore di un manoscritto incluso nel Codice 952b del "Supplèment arabe" dell'allora Biblioteca imperiale di Parigi. Questo anonimo maestro non conosceva l'opera di Diofanto (250 d.C.), ma molto bene quella di Euclide (300 a.C.). Le identità in argomento, che non si trovano negli Elementi, erano invece presenti e applicate nell'Aritmetica di Diofanto alla proposizione V,7 **(27)**.

6. Mesopotamia e antica Cina, una stupefacente connessione.

Troviamo ancora, a testimonianza di una notevolissima e diretta influenza algebrico geometrica babilonese o di una tradizione comune per entrambe le civiltà, le stesse identità e lo stesso visibile diagramma quadratico risolvente composto a mosaico con l'uso equivalente di figure geometriche ritagliate con carta colorata, nello "gnomone degli Zhou", un documento dell'antica Cina risalente alla dinastia Han (206 a.C. - 220 d.C.) dove la dimostrazione equivalente al "Teorema di Pitagora" è perfettamente identica. Joseph Needham, Scienza e Civiltà in Cina, Vol III parte I, Einaudi 1985, pag.28, 120,121,122,123,124,125.

Notevole è l'analogia tra lo studio geometrico cinese dei solidi presenti nei "Nove capitoli sui procedimenti matematici" risalente alla stessa dinastia Han e quello babilonese col diagramma cubico risolvente (vedere A. Bonet fig .4 pag .207 e fig. 6 pag. 209 L'Educazione Matematica. 1989, Karine Chemla: "Matematica e cultura nella Cina antica" presente sul Libro " la Matematica " i luoghi e i tempi vol 1 a cura di Bartocci e Odifreddi Einaudi 2007, Jöran Friberg, Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics – World Scientific 2007 – da pag. 202 a pag. 210).

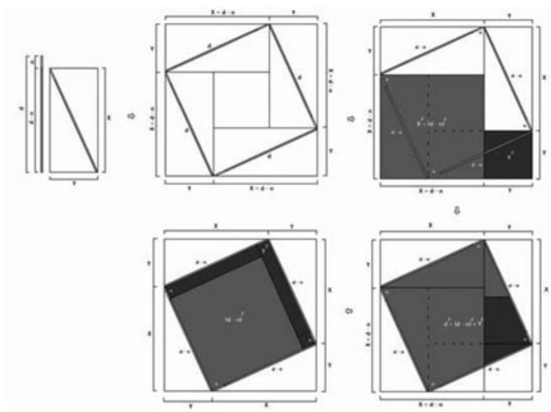
2) I problemi del scivolamento del palo o della canna delle Civiltà arcaiche, erano strettamente collegati al diagramma geometrico risolvente a modulo quadrato.

La ricerca di un sapere geometrico, come quello sopracitato, ha probabilmente,a mio parere, innescato e prodotto indirettamente sin dal periodo babilonese più antico, una regola generale rivelatasi valida per i triangoli rettangoli e perfettamente applicata con i problemi,noti come i problemi del scivolamento del palo o della canna e rinvenuti sulle tavolette BM 34568,12 (periodo selucida) e BM 85196,9 (antica matematica babilonese), **(28)** correlati, per similare dinamicità, tra il movimento di scivolamento della "canna" e quello per rotazione o di scivolamento del "quadrato" sopracitato costruito sulla diagonale, ovvero sul suo lato equilaterale che coincide con "l'ipotenusa pitagorica". A differenza del "teorema di Pitagora", per i babilonesi questa regola generale e presumibile che veniva applicata sempre in forma indiretta al triangolo rettangolo, in quanto legata e ancorata alle identità algebriche visualizzabili sul loro diagramma quadratico risolvente, svolto unicamente alla risoluzione dei problemi di 2° grado e quindi più collegato a superfici quadrate e rettangolari, dove di conseguenza condizionava i passaggi algebrici dello scriba che possiamo osservare, alquanto inusitati e schematici nel giungere alle soluzioni dei problemi e dove lo portavano a ripercorrere e a dilungarsi in passaggi algebrici ripetitivi laddove, non ce ne sarebbe stato bisogno. **(29)**

Difatti, servendoci del solito diagramma quadratico risolvente e costruendo internamente i problemi sopracitati (noti come i problemi del scivolamento del palo o della canna) per poi svilupparli nelle seguenti fasi, possiamo osservare:

PRIMA IPOTESI

FASE1 FASE2 FASE3



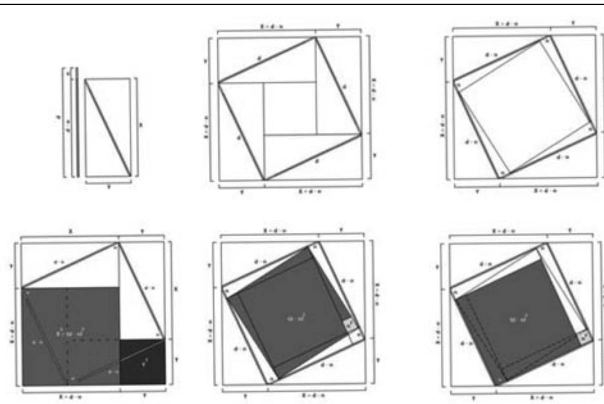
FASE 5 FASE 4

PROBLEMA: BM85196,9; $d^2 = (d\text{-}n)^2 + Y^2$
BM34568 n°12; d = ?; n = 3; Y = 9
IDENTITÀ: d = 30; n = 6; Y = ?
$d^2 = (d\text{-}n)^2 + 2n(d\text{-}n) + n^2$
$2nd = Y^2 + n^2$

Fig. 9

SECONDA IPOTESI EQUIVALENTE

FASE 1 FASE 2 FASE 3



FASE 6 FASE 5 FASE 4

Fig. 10

IDENTITÀ:	$d^2 = (d-n)^2 + n^2 + 2n(d-n) = (d-n)^2 + Y^2 = d^2$; $2nd - n^2 = Y^2$

Nella fase 1, si inserisce nel rettangolo “il palo di canna” del problema che coincide esattamente con la diagonale del rettangolo XY, come per il problema di Fig. 8.

Nella fase2, come per i problemi precedenti, si compone il diagramma con la superficie che contiene internamente la “canna” posta nella diagonale e si imbastisce a modulo quadrato.

Le fasi 4 e 5 di fig. 9 sono solo specifiche per visualizzare i passaggi del problema n°12 BM 34568 che contiene la variante: $d^2 = (d - n)^2 + Y^2$; quindi: $2nd = n^2 + Y^2$; con $n = 3$, $Y = 9$ (vedere l’equivalente fig. 10).

La fase3 di fig.9, identica per entrambi i problemi, visualizza l’identità algebrica già vista col disegno di Fig.7 e come si può osservare, porta lo scriba a ripercorrere, per il problema n°12, una strada più lunga in quanto legata e condizionata dal solito diagramma quadratico risolvente, come in fase 5 di Fig.9.

Notevole è l’analogia del diagramma Babilonese nella fase3 di fig. 10 con il diagramma Cinese risalente al secondo millennio a.C. e presente nello Chou – Pei Suan –King, **(30),** nonché l’analogia con i problemi soprindicati, di uno stesso problema cinese presente sul libro Chiu-Chang Suan-Shu; questo spiega efficacemente la connessione di una medesima formula di risoluzione presente per problemi analoghi tra l’antica Cina e i Babilonesi e quindi, dell’esistenza di un identico criterio e diagramma tra le due antiche Civiltà. Lo stesso problema del scivolamento della canna lo troviamo anche nella Civiltà Egizia nel problema n° 24 del Papiro del Cairo (I sec. a.C.) **(31)**. Lo stesso diagramma e la stessa regola li troviamo nella tradizione Indiana e Islamica **(32)**. Si può dedurre, che chi conosceva il particolarissimo problema del scivolamento del palo o della canna, conosceva di conseguenza, il criterio del scivolamento del quadrato e quindi, il diagramma quadratico risolvente a modulo quadrato.

Nella equivalente fig. 10 alla fase 3, si può notare (solo a titolo di curiosità) come il procedimento di collegamento progressivo della diagonale, può essere ripetuto all’interno dell’ultimo quadrato costruito (o all'esterno del primo), producendo un terzo e poi un quarto quadrato e così via, in una progressione infinita. Notevole è l'analogia iterativa col pentagramma pitagorico.

PROGRESSIONE INFINITA DEL QUADRATO
COSTRUITO SULLA DIAGONALE

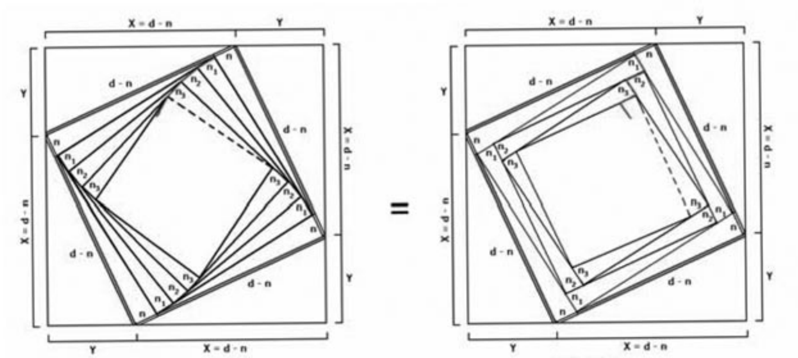


FIG. A7 FIG. B7

Fig. 11

Notare, nonostante la loro equivalenza, come la progressione infinita della Fig. 11/A7 è esteticamente e geometricamente differente rispetto a quella di Fig 11/B7; probabilmente anche un'attrazione estetica, deve aver giocato un ruolo determinante per uno studio che ha generato la prima presa di coscienza, iterando verso un concetto di "limite" e di "infinito" **(33)**.

Inoltre, se dovessimo quadrettare l'area costruita sui quadrati dei lati X e Y (vedere fig. 9, fase 3) e l'area costruita sulla diagonale (fig. 9 fase 5) non possiamo non accorgerci della stupefacente analogia con la spiegazione geometrica sulle terne pitagoriche (lo gnomone dei pitagorici per i numeri dispari) che si attribuisce ai discepoli di Pitagora con quanto ci ricorda Plutarco e Proclo e che i babilonesi (così come per tutti coloro che conoscevano il diagramma), potevano aver sviluppato, per terne limitate a valori interi, allo scopo di dare una dimostrazione geometrica per casi particolari che rendevano didatticamente più elementare e percepibile la spiegazione dell'uguaglianza generale precedentemente osservata pari a: $2nd - n^2 = Y^2$.

QUADRETTATURA DELLE SUPERFICI EQUIVALENTI
DELLA REGOLA GENERALE BABILONESE

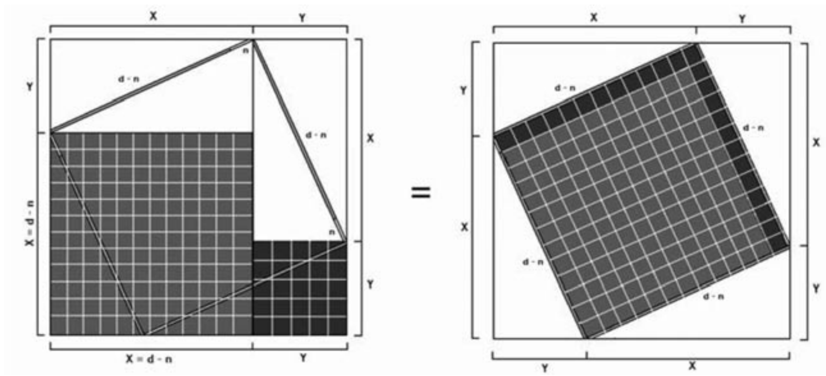


Fig. 12

Notevole è l'analogia e la presenza dello gnomone nei Sulvasutra di Apastamba **(vedere Allegato 13)**. Inoltre, se pensiamo che l'uguaglianza che abbiamo interposto nel piano tra le varie fasi del diagramma quadratico risolvente, per i babilonesi era forse più agevole dimostrarla interponendola in altezza, **(vedere allegato 11)** con le varie sovrapposizioni applicando un criterio di invarianza dell'area e della forma con il mutamento di composizione dei vari strati, ovvero impilando le varie fasi, ognuna corrispondente ad un livello del diagramma composto a frammenti geometrici d'argilla, l'affinità tra la tecnica babilonese e quella della tradizione rituale vedica per la costruzione degli altari, rafforzerebbe inequivocabilmente la connessione tra queste due antiche civiltà.

7. Due ipotesi conclusive.

Si può concludere che, questa tecnica empirica, di una matematica fatta con mattoni, evidentemente, doveva essere applicata da tutte le grandi Civiltà di costruttori (non per questo, necessariamente conosciuta); la presenza però, di un medesimo e particolare problema, presso i Babilonesi (o i Sumeri), Egizi, Indiani e Cinesi e che richiedeva la conseguente conoscenza di un altrettanto particolare e identico criterio, collegato ad un unico e polivalente diagramma, ci lascia sostanzialmente due ipotesi:
1) O i Sumeri hanno fatto scuola, sia ai loro diretti discendenti, sia alle altre Civiltà limitrofe

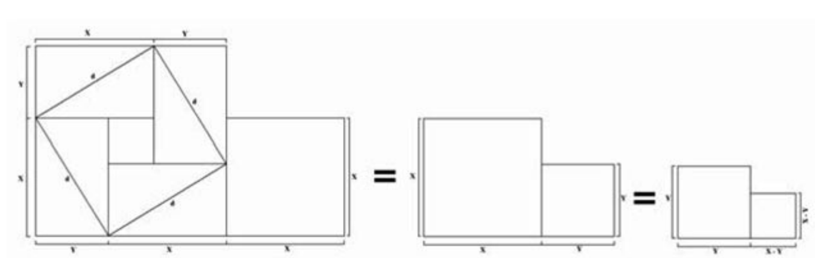
2) Oppure: Sumeri, Egizi, Indiani e Cinesi, erano in origine un'unica e forse più vasta Civiltà Madre, con un'unica lingua, cultura e territorio, che poi, per ragioni a noi sconosciute o biblicamente riconducibili (La Bibbia, Genesi 11), si sono successivamente divisi, stabilendosi ognuno in territori diversi, con lingue diverse, formando Civiltà diverse e mantenendo solo inizialmente, le stesse originali conoscenze e tradizioni culturali comunemente acquisite **(34)**.

8. I due tesori della geometria

Vorrei far notare ancora, quanto sarebbe stato facile, sia per i babilonesi, sia per i pitagorici (sia per tutti coloro che conoscevano lo stesso diagramma) osservare due particolari proprietà del diagramma quadratico risolvente a modulo quadrato, suggerite sulla spinta di una semplice verifica con l'applicazione inversa della regola generale babilonese sopracitata e ravvisabile sul diagramma che visualizza il seguente quesito **(35)**

$$X_2 - Y_2 \quad = \quad (X + Y)(X - Y) \quad = \quad XY$$

Fig. 13

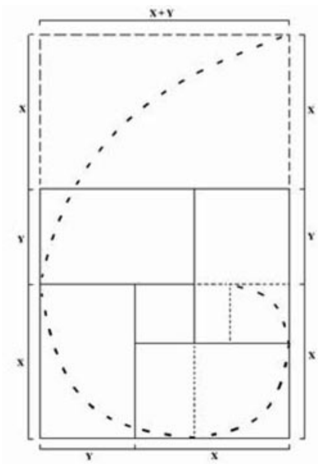


$$\Phi^2 = (X + Y)^2/X^2 \quad = \quad X^2/Y^2 \quad = \quad Y^2/(X - Y)^2$$

$$\Phi^2 = (X+Y)^2/d^2 - Y^2 \quad = \quad d^2 - Y^2/d^2 - X^2 \quad = \quad d^2 - X^2/(X-Y)^2$$

Fig. 14

PROPRIETÀ ITERATIVA DELLA SEZIONE AUREA ALL'INTERNO DEL DIAGRAMMA



Storia della Matematica pag. 132 - 133
Carl B. Boyer Mondadori 2002

Fig. 15

Cosa si verifica, quando la differenza tra i due quadrati costruiti sui lati di un rettangolo qualsiasi uguaglia la superficie dello stesso rettangolo? Fig.13.... Si verificano due curiose proprietà!

1) Anche il rapporto tra i due quadrati uguaglia quello tra gli stessi e i quadrati presenti nel diagramma costruiti in funzione dei lati del rettangolo e messi in rapporto tra loro. Questo particolare rapporto corrisponde al quadrato della "sezione aurea". Fig.14

2) La seconda proprietà, strettamente collegata alla prima, vede anche i rispettivi lati degli stessi quadrati entrare fra loro in uguale rapporto, pari alla ben nota "sezione aurea". Fig.15

Probabilmente, questa curiosa osservazione, è stata approfondita successivamente dai pitagorici che hanno avuto il merito di svincolarla dal diagramma babilonese.
La troviamo in effetti con Euclide in una costruzione elegante fatta con riga e compasso presente nel libro II, proposizione 11 (esposta come un caso speciale della proposizione 6) e nel libro VI, proposizione 30.
Fondamentalmente, si può ipotizzare che i Babilonesi (nonché tutti i popoli che conoscevano la tecnica artigianale del diagramma) erano già, con buona attendibilità, consapevoli della generalità e potenzialità della

loro regola empirica tra i lati e la diagonale di un mattone-rettangolare qualsiasi, ben 1000 anni prima di Pitagora e sempre grazie, al loro diagramma quadratico risolvente per i problemi di 2° grado, erano inoltre e probabilmente consapevoli di una seconda straordinaria e intrinseca particolarità presente nel diagramma: quella che conduceva al noto rapporto aureo.

Possiamo affermare, che questo diagramma quadratico risolvente contiene anche intrinsecamente i due tesori della geometria ammirati da Keplero: **(36)**.

1) Il “Teorema di Pitagora” o meglio la “Regola Generale Babilonese”che si visualizza e si verifica sempre in quanto la somma dei quadrati costruiti sui lati di un rettangolo qualsiasi, uguaglia sempre quella del quadrato costruito sulla sua diagonale.
2) Il “rapporto aureo” che si visualizza e si verifica solo e quando, la differenza dei quadrati costruiti sui lati di un rettangolo qualsiasi, uguaglia la sua stessa superficie.

9. La probabile strada graduale.

Vorrei far vedere inoltre, come col medesimo diagramma quadratico risolvente si può dimostrare efficacemente l’uguaglianza:

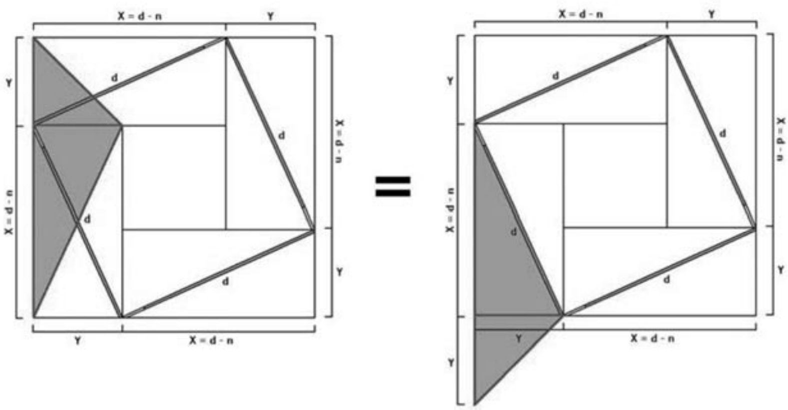
$$3\{[(X+Y)/2]^2\}+[(X-Y)/2]^2 = X^2+XY+Y^2;$$

una dimostrazione già proposta nel 1978 da Tullio Viola e Livia Giacardi mediante un diagramma, utilizzato inconsapevolmente e per fini didattici, perfettamente identico con quello in argomento del presente lavoro e che aprirebbe un ulteriore indizio su una probabile connessione tra le Civiltà Orientali e quella Egizia **(37)**. Probabilmente è dallo studio di uguaglianze come quella sopracitata che i babilonesi hanno intrapreso una strada, che gradualmente li ha condotti alla loro importantissima regola **(vedere allegato 14)**.

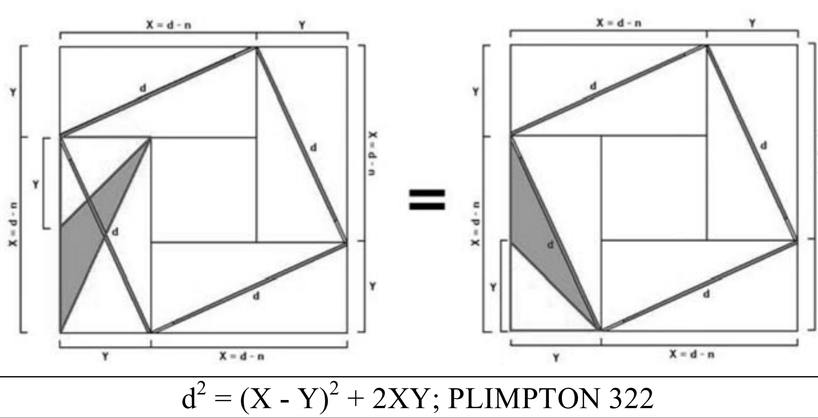
Il Plimpton 322, era forse il teorema di Lazare Carnot dell’antichità?

Rimanendo ancora in tema con la cultura babilonese, si può ipotizzare che la famosa tavoletta n° 322 (circa 2000 a.C.) della Plimpton Collection, **(38)** rappresentava probabilmente, un arcaico tentativo dei babilonesi, di estendere ulteriormente la loro regola generale per applicarla ai triangoli non rettangoli o meglio, ai quadrangoli non rettangoli, in quanto i casi limitati all'angolo retto, erano probabilmente divenuti insufficienti nel risolvere i loro problemi pratici, o fin troppo esaustivi (ormai considerati di normale routine o prassi ordinaria), da tentarne una generalizzazione, magari suggerita o intravvista col solito diagramma quadratico risolvente. Il preludio alle proposizioni n° 12 e 13 raccolte da Euclide nel Libro II degli Elementi? **(39)**.

PROBABILE GENERALIZZAZIONE DELLA REGOLA BABILONESE



$d^2 = (X + Y)^2 - 2XY$; PLIMPTON 322



$d^2 = (X - Y)^2 + 2XY$; PLIMPTON 322

Fig. 16

10. Dall’Oriente a Pitagora.

Per quanto sopraddetto, possiamo benissimo ipotizzare (ma è una ipotesi che avvalora i dibattiti già sostenuti da altri studiosi) **(40)** che Pitagora nei suoi viaggi, fra cui sappiamo in Mesopotamia, deve aver sicuramente appreso la funzionalità polivalente di questo diagramma che permetteva anche la risoluzione empirica dei problemi di 2° grado sopracitati, il quale, al suo ritorno in Patria e stabilitosi a Crotone, non avrebbe fatto altro che aprire e gestire, una scuola analoga con un bagaglio culturale appreso sulle conoscenze matematiche millenarie delle rinomate scuole dell’oriente, sradicandosi poi rapidamente, estrapolando, rielaborando e arricchendo quei fondamenti generali, algebrico-geometrici, già esaurientemente espliciti e basilari della cultura mesopotamica ma ancorata al loro magico diagramma d’argilla, chiamando; nel caso del teorema a Lui attribuito, semplicemente “cateti” i “lati” del rettangolo e “ipotenusa” la sua “diagonale”, svincolando così dal diagramma la “Regola Generale Babilonese” e inquadrandola sotto il profilo esclusivo della figura geometrica del “triangolo rettangolo”, anziché del “rettangolo” a cui era collegata.
Svincolarsi dal diagramma d’argilla, significava svincolarsi da quella tecnica particolarmente empirica - artigianale di tassellatura a frammenti geometrici mobili e sovrapponibili, usata nelle scuole orientali del sapere, che mal si conciliava con l’evoluzione in atto nella Magna Grecia, mediante una nuova tecnica, fatta con l’uso di riga e compasso indispensabile alla rappresentazione grafica sul papiro, quest’ultimo, una vantaggiosa novità importata dall’Egitto, che iniziava gradualmente ad imporsi **(41)** come valido ausilio unificante di comunicazione, sia culturale che amministrativa, sia della scrittura che della grafica ed esportato poi, in tutto il mondo classico **(42)**.
Il merito di Pitagora, celebrato tra i suoi successori, deve probabilmente attribuirsi al fatto che fu il primo, assieme ai suoi discepoli, a tentare di far uscire, una dopo l’altra, dal diagramma quadratico risolvente, tutte quelle valide proprietà algebrico-geometriche in esso contenute e adattarle una ad una, con soluzioni altrettanto valide e alternative mediante riga e compasso, in maniera astratta e puramente intellettuale che poi, sottoforma di proposizioni venivano raccolte fedelmente e per rispecchiare l’analoga unicità del diagramma , tenute assieme o unificate mediante una necessaria impalcatura assiomatica – deduttiva inevitabilmente da ricercare e che ritroviamo esplicitamente sugli “Elementi” di Euclide.

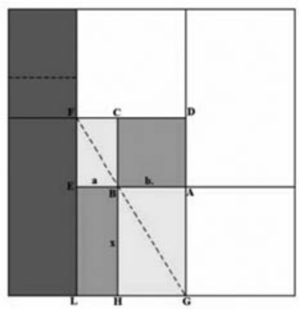
La forza matematica dei Babilonesi era avvenuta prevalentemente dentro il loro diagramma d'argilla unificante, quella dei Greci, grazie a Pitagora, era avvenuta, per necessità sociale e culturale, uscendo fuori dallo stesso diagramma, visualizzando e riproponendo solo ciò che serviva allo scopo ultimo e adattando, le proprietà algebrico – geometriche in esso contenute, alla nuova tecnica di riproduzione fedele su papiro, col solo uso di riga e compasso.
Quindi, fu il primo ad intuire coraggiosamente quello svincolo che ha trasformato la potenzialità del diagramma e la sua tecnica artigianale, adattandola a proprio vantaggio con gli strumenti "moderni" dell'epoca, per un vantaggioso mezzo innovativo della comunicazione, consentendo ai Greci di raggiungere quel salto intellettuale e di qualità delle idee che ha contagiato lo spirito culturale delle future generazioni, producendo dopo di Lui, l'età eroica e di cui forse, per questo si sono sentiti fortemente debitori e riconoscenti nei confronti del "Pioniere Pitagora", deformando probabilmente oltremisura, la paternità e l'origine delle scoperte che la tradizione gli attribuisce.

11. Da Pitagora a Euclide

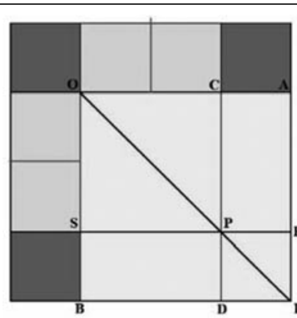
Possiamo ribadire, per quanto già esaminato, che Pitagora del "Teorema" a Lui attribuito ha avuto probabilmente il solo merito di aver tentato per primo, lo svincolo dalla sudditanza al diagramma quadratico risolvente, dovendo però a sua volta, alla pari della regola generale babilonese dimostrata empiricamente, cercare un'altrettanto valida dimostrazione generale alternativa e da costruire col solo uso di riga e compasso **(43)**. Per questo motivo Euclide, spinto dalla consapevolezza di aver ereditato l'impronta nuova della cultura ellenica, ha raccolto la sfida generazionale lanciata da Pitagora, fornendo una brillante e quanto elegante dimostrazione di questo "Teorema" inserendola nei suoi famosi libri degli Elementi **(44)**.
Una sfida innescata da Pitagora e dalla sua scuola, con la ricerca di nuove soluzioni alternative, verso tutti quei problemi di applicazione delle aree studiati e riproposti fedelmente, dove prima erano stati sempre visualizzati e risolti dai babilonesi, mediante il loro diagramma polivalente.
Il diagramma viene smontato e riordinato in proposizioni che saranno raccolte sugli Elementi di Euclide.
Per rendersi conto di questo fatto, è sufficiente osservare tutte le costruzioni geometriche finali delle proposizioni, che servivano a risolvere i

problemi algebrici, raccolte da Euclide,ad iniziare dai primi due libri degli Elementi e confrontarle con quelle che si possono intravedere ed estrapolare sul diagramma geometrico risolvente babilonese per la soluzione degli stessi problemi focalizzati principalmente nella quarta parte dello stesso, per convincersi della inequivocabile e analoga connessione **(45)**.

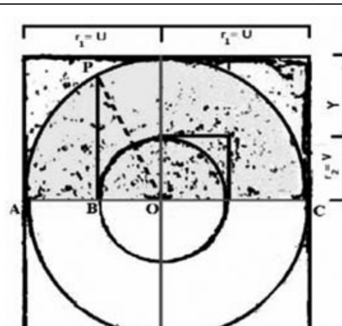
Euclide: LIBRO I – PROP. 43; $ax = b^2$



Euclide: $ax=bc$; $OA=a$; $OB=b$; $OC=c$; $CP=x$



Euclide: LIBRO II – PROP. 14; $X^2=(r_1-r_2)\ (r_1+r_2)=ab$



Euclide: LIBRO II – PROP. 1; AD (AP+PR+RB)

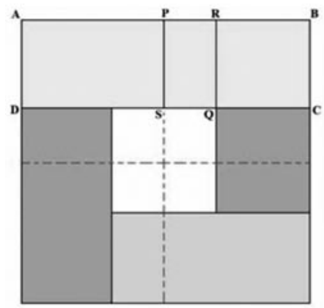
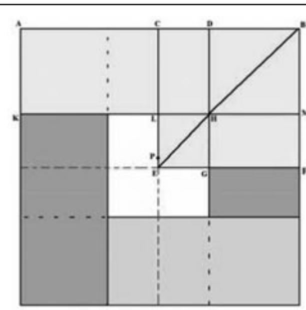
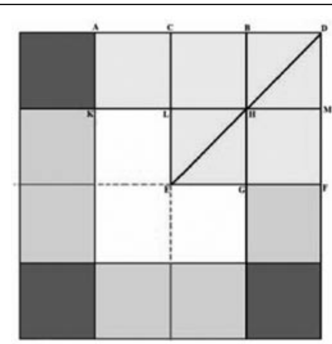


Fig. 17

Euclide: LIBRO II – PROP. 5; $ax-x^2=b^2$



Euclide: LIBRO II – PROP. 6; $ax+x^2=b^2$



Euclide: LIBRO II – PROP. 11; $ax+x^2=a^2$

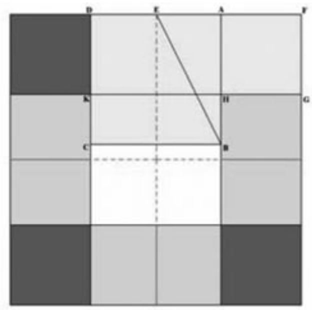


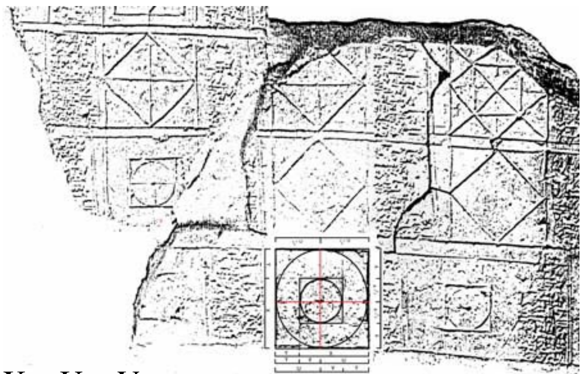
Fig. 18

Non si può non cogliere l'evidente analogia dei temi di fondo presenti sui libri degli Elementi di Euclide con quello identico sui Sulvasutra, della matematica vedica Indiana, ove sono proposte soluzioni tecniche in tutto simili a quelle euclidee **(46)**. Una procedura di scomposizione del diagramma e ricomposizione, in un nuovo ordine geometrico, iniziata dagli Indiani ed emulata mirabilmente dai Pitagorici?

Lo stesso possiamo dire della matematica Islamica, con i diagrammi di Al-Khuwarzmi, dove appaiono evidenti entrambe le tradizioni matematiche sopracitate con quella Mesopotamica **(47)**.

Certamente, quanto detto fin qui, fa parte della sfera delle congetture, che saranno più avanti rafforzate, per merito del diagramma geometrico risolvente dove, come vedremo in seguito, prenderà realisticamente forma e corpo dall'analisi di antichi problemi babilonesi contenuti nella tavoletta AO 8862. Tutto questo, lo vedremo in un articolo successivo.

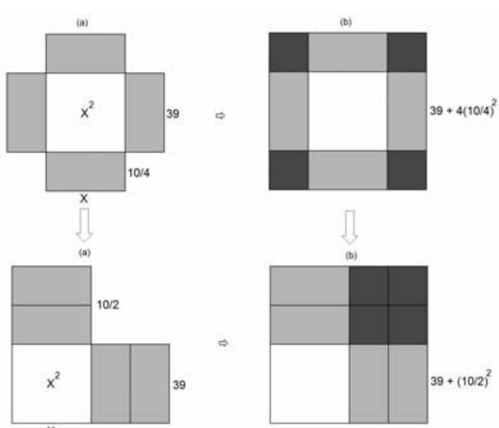
Allegato 1



$X = U + V = r_1 + r_2$
$Y = U - V = r_1 - r_2$
$r_1 = (X + Y)/2 = U$
$r_2 = (X - Y)/2 = V$

Ricostruzione geometrica del principio della semisomma e della semidifferenza in uso presso i babilonesi

Allegato 2



Diagrammi geometrici risolventi usati da al-Khuwarizmi per l'equazione: $x^2 + 10x = 39$

Silvio Maracchia, Storia dell'Algebra, Liguori 2005, pag. 151

Allegato 3

Il palazzo della simmetria

Un pavimento dell'Alhambra illustra un altro esempio del gruppo di simmetrie 442

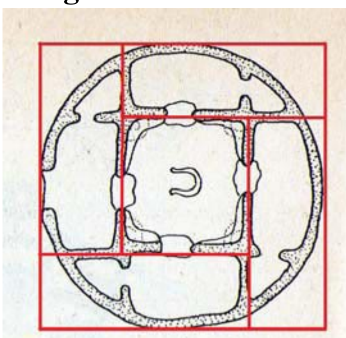
Marcus du Sautoy, Il Disordine Perfetto, pag.107, Fig. 3.8, Rizzoli 2007.

Allegato 4

Ceramica sumerica "Susa" IV millennio a.C.

Andrè Parrot, i Sumeri, Feltrinelli 1968

Allegato 5



Modellino di una casa sumerica del III millennio a.C.

La Matematica delle Civiltà Arcaiche,L.Giacardi, S.C. Roero, 1978

Allegato 6

Lastra votiva sumerica XXV secolo a.C.

Pierre Amiet,L'Arte Antica del Vicino Oriente,Garzanti 1994,pagg.124,368.

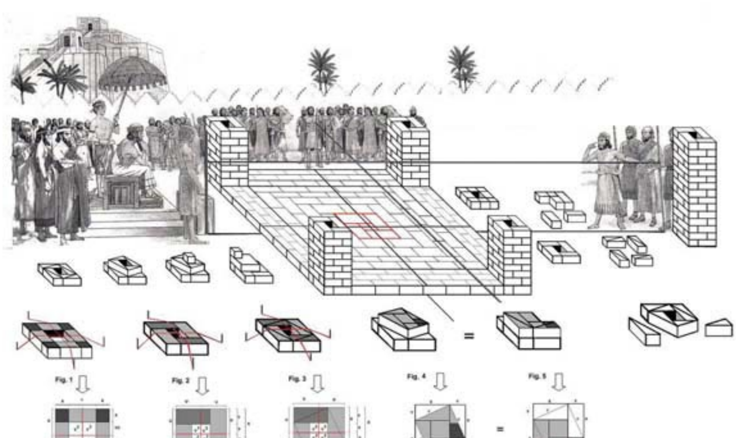
Allegato 7

Stampo da cucina di Mari XVII secolo a.C.

Dai Sumeri ai Babilonesi, I popoli della Mesopotamia, Universale Electa/Gallimard

Joran Friberg, Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics – World Scientific 2007 – pag. 167, Fig 7:9:4 e 169, Fig. 7:9:7:

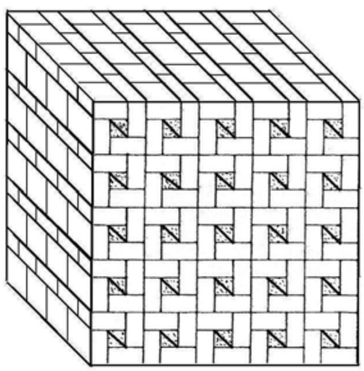
Allegato 8



Ipotesi di applicazioni tecniche e implicazioni empiriche, mediante mattoni, di una figura o diagramma a modulo quadrato, alla base dell'arte costruttiva e algebrica delle Civiltà arcaiche

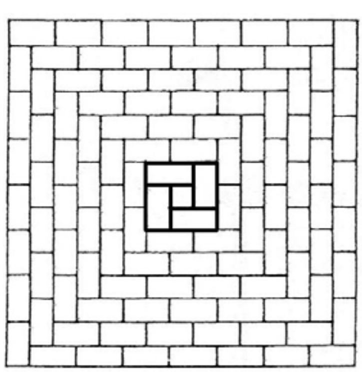
Allegato 9

Ipotesi di un solido e rapido stoccaggio di mattoni, per una fase finale di essiccazione che consente, un migliore utilizzo dello spazio, anche al coperto, con ottimale ventilazione.



Catasta di mattoni, con trama a modulo quadrato, forata su due facce

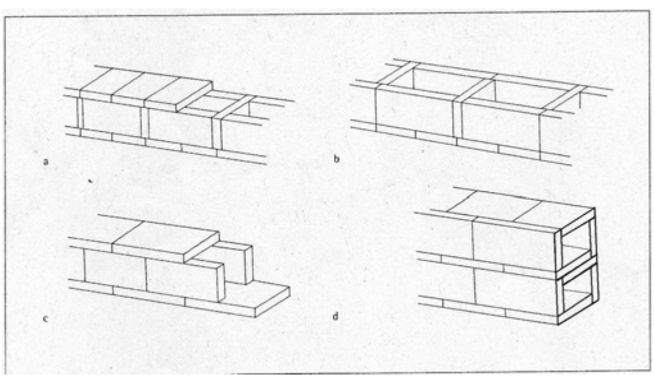
Allegato 10



Ipotesi di una pavimentazione quadrata con mattoni rettangolari a quadrati concentrici.

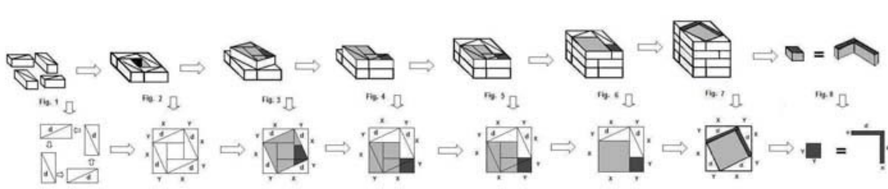
Le prime costruzioni cinesi in mattoni

In passato una certa propaganda nazionalistica ha attribuito al popolo cinese l'invenzione del mattone. Oggi questa visione appare superata, ma gli studiosi concordano sul fatto che tra il 500 a.C. e il 1000 d.C. si sviluppò in Cina una produzione di mattoni altamente qualificata che impiegava tecniche radicalmente diverse da quelle occidentali.

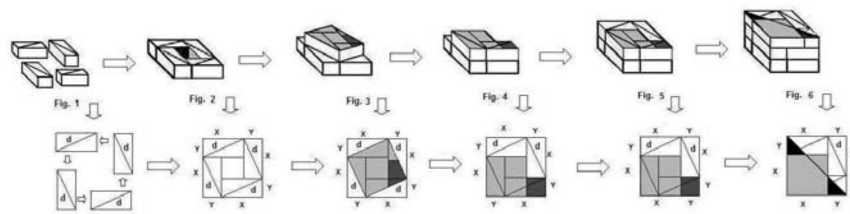


Il mattone e la sua storia, 8000 anni di architettura, James W.P. Campbell – Will Pryce, Bolis Edizioni 2003

Allegato 11



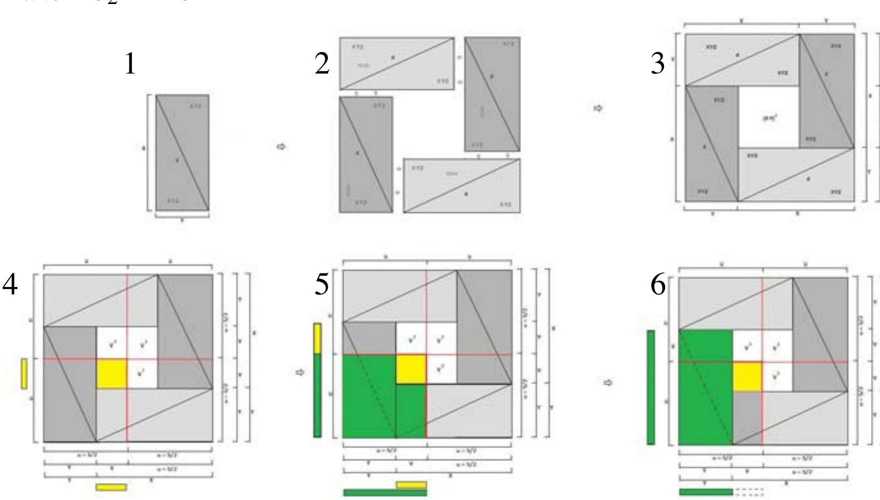
Ipotesi di dimostrazione empirica, della regola generale babilonese mediante mattoni, tra la diagonale e i lati di un mattone rettangolare qualsiasi.



$d^2 = X^2 + Y^2; X^2 + Y^2 = (X + Y)^2/2 + (X-Y)^2 /2$

Allegato 12

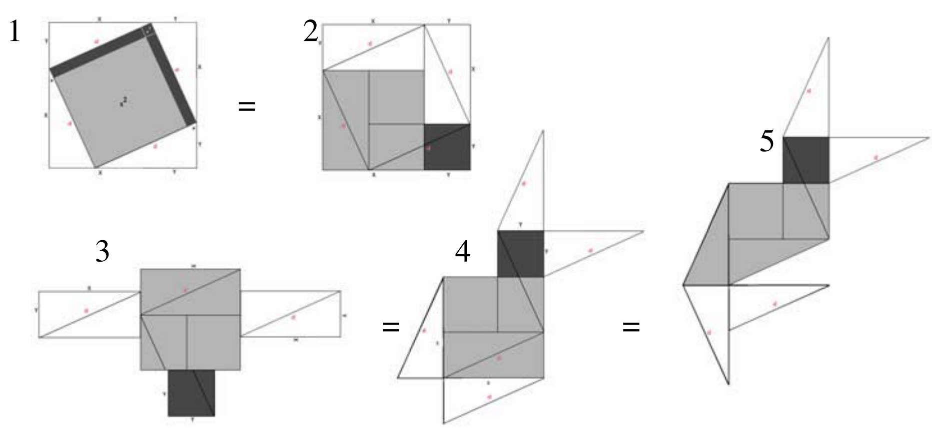
Tav. Db_2 - 146



Visualizzazione degli schemi algebrici, seguiti dallo scriba e che compaiono sul diagramma.

Allegato 13

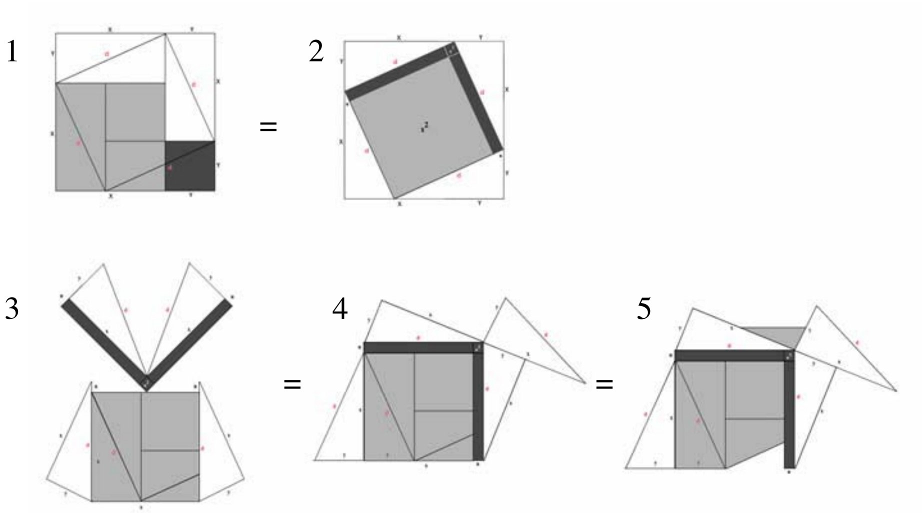
Analogia con la tecnica rituale vedica per la costruzione degli altari di Agni sul principio d'invarianza dell'area del diagramma e mutamento della forma



1-2) diagramma e altari a forma quadrata; 3) altare a forma di falco in volo; 4) altare a forma di airone (o ibis) semi-eretto; 5) altare a forma di airone (o ibis) eretto

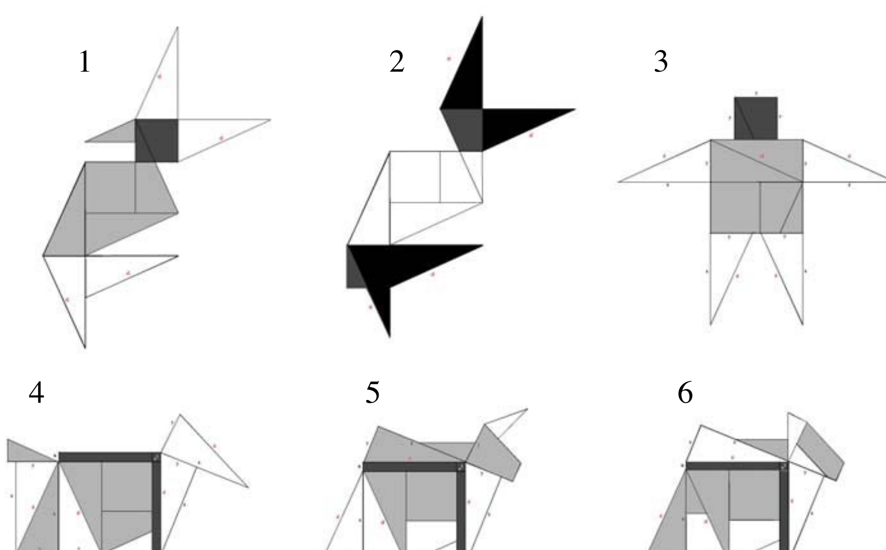
Ipotesi dimostrativa che i quadrati in argomento sono costruiti perfettamente sui lati interessati

Analogia con la tecnica rituale vedica sulla regola di Baudhayana e di Apastamba. Paolo Zellini, Gnomon, Adelphi 1999, pag.74.



1-2) diagramma e altari a forma quadrata; 3) altare a forma di falco in picchiata; 4-5) altare a forma di quadrupede da soma

Ipotesi dimostrativa che il quadrato y^2 e' uguale alla forma gnomonica pari a $2nx + n^2 = 2nd - n^2$



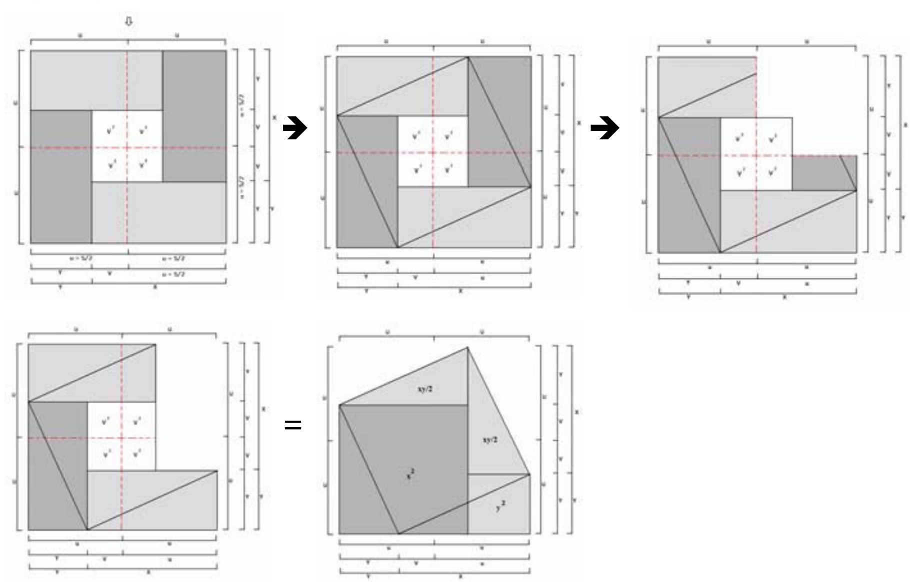
1) altare a forma di airone; 2) altare a forma di ibis?; 3) altare a forma di uomo; 4) altare a forma di quadrupede; 5) altare a forma di toro; 6) altare a forma di ariete

Probabili forme degli altari di Agni, scaturiti dal diagramma a modulo quadrato col criterio d'invarianza dell'area e il mutamento della forma, citati nella tradizione Vedica Indiana.
Una possibile implicazione con la cultura Egizia?

Paolo Zellini, Gnomon, Adelphi 1999

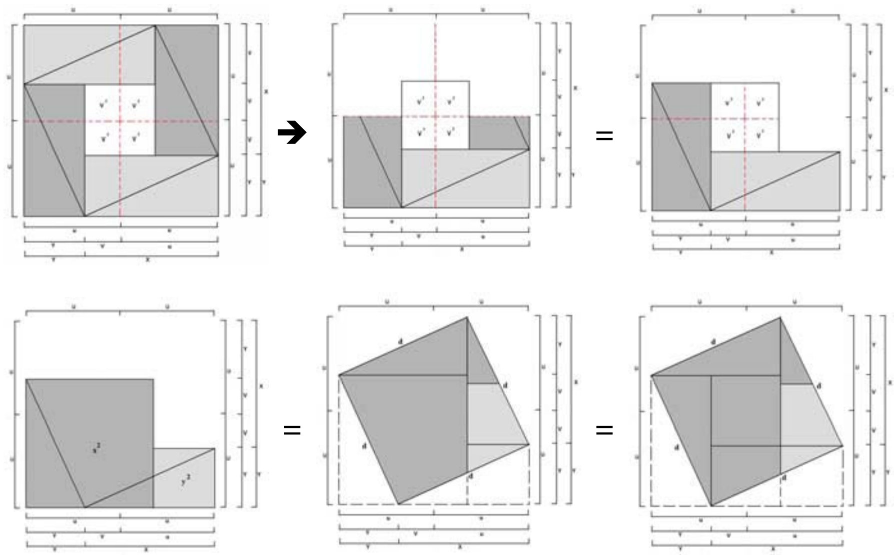
Allegato 14

La probabile strada graduale che ha condotto i babilonesi alla loro regola generale



Studio dell'identita':

$$(x+y)^2 - xy = 3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = x^2 + xy + y^2$$



Studio dell'identita':

$$(x+y)^2 - 2xy = 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = x^2 + y^2 = d^2$$

NOTE BIBLIOGRAFICHE

1) Quelle a contenuto matematico sono circa 300: alcune risalgono al periodo sumerico (3000 – 2100 a.C.), altre, un gruppo più ampio, al periodo che va dall'epoca di Hammurabi fino al 1500 a.C. ed altre ancora risalgono al nuovo impero babilonese e al periodo seleucide (600 – 300 a.C.)

2)Un principio che realizzai, a 18 anni, solo esclusivamente con l'ausilio dell'intuizione rivelatrice, senza alcuna conoscenza specifica, né della materia storica, né delle opere di Otto Neugebauer, Thureau, F.Dangin e E: M. Bruins, ritenuti i maggiori studiosi che, nella prima metà del 1900, fornirono fondamentali contributi, traducendo direttamente le tavolette cuneiformi a carattere matematico i quali, sottolinearono proprio questo fondamentale principio, della semisomma e della semidifferenza, che emergeva esplicitamente alla base dell'algebra Mesopotamica. Un principio che sviluppai indipendentemente e intuitivamente nel 1978, che mi permise di costruire conseguentemente un'algebra – geometrica dal sapore arcaico e che poi, nei dieci anni successivi, proposi coraggiosamente come possibile metodo algebrico babilonese, presso riviste universitarie. Solo nel 1987 intravidi casualmente la prima conferma, alla mia ipotesi, nel libro, La matematica delle civiltà arcaiche, .L.Giacardi, S.C.Roero, Stampatori,Torino 1978, che mi permise nel 1989, la pubblicazione di ciò che prima, faticavo a giustificare col solo supporto ipotetico – deduttivo e che vidi invece, con soddisfazione, notoriamente conosciuto dagli Illustri Storici, quale base algebrica fondamentale dell'algoritmo risolvente babilonese.

3) Ved. A. Bonet, L'educazione Matematica, Anno X-serie II-Vol.4,Università di Cagliari, 3 dicembre 1989 pag. 199,200,201,202.

F. Thureau-Dangin, Textes Mathématiques Babyloniens, 1938, Introduction,

Jöran Friberg, Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics, pagg. 5,6; World Scientific, 2007

4) S.J. Lurje, Archimedes, Wien 1948.

5) Questo polivalente diagramma geometrico risolvente ha la prerogativa di presentarsi come un paradigma universalmente valido, sia per la soluzione dei problemi algebrici babilonesi, sia per la dimostrazione delle identità notevoli conosciute; un autentico ”passe-partout” geometrico, che si riscontra, come vedremo, anche nelle altre Civiltà arcaiche; ciò spiega l’affinità, fra queste antiche tradizioni matematiche.

6) A. Bonet,L’educazione Matematica 3/12/1989, pag. 210

7) Jens Høyrup, Mathesis, Vol XIII N.3, Universidad Nacional Autonoma de México., Agosto 1997.

Jens Høyrup,Lengths,Widths,Surfaces. Spinger 2002.

Jöran Friberg, Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics – World Scientific 2007.

Paolo Zellini; Gnomon, una indagine sul numero, Adelphi 1999,

Silvio Maracchia, Storia dell’Algebra, Liguori 2005.

C.Bartocci e P.Odifreddi,La Matematica i Luoghi e i tempi, Einaudi 2007.

Enciclopedia Treccani,Storia della Scienza, Vol I,II, III, 2002

8) A. Bonet, L’educazione Matematica, 3/12/1989 pag. 210, fig. 8.

9) Enciclopedia Treccani,Storia della Scienza,Vol II, pag. 782

10) Enciclopedia Treccani,Storia della Scienza, Vol III, da pag 506 a pag 524.

11) La tavoletta A:O.8862 risale al 1700 a:C. circa.

12) Per esempio i primi problemi contenuti nella tavoletta A.O. 8862, ma anche quelli contenuti nella tavoletta B.M 13901.

13) O.Neugebauer, Le Scienze Esatte nell’Antichità, Feltrinelli 1974, pag. 59

Carl B. Boyer, Storia della Matematica, Mondadori, 2008, pag. 38

14) F.Thureau – Dangin,Textes Mathématiques. Babyloniens. 1938, pag.219:…„faire se tenir mutuellement (comme les fils de la trame et de la chaine?)„croiser (deux nombres entre eux ou un nombre avec lui-meme), j’ai croisé…..meme sens,…ecc. Questa particolare costruzione o imbastitura artigianale del diagramma è la causa probabile per la quale lo scriba usa modi diversi per esprimere delle operazioni matematiche che si mescolano con delle operazioni d’imbastitura:e di procedimento sugli schemi visualizzati.

15) Si può intravvedere questo diagramma e il suo gruppo di simmetrie, in un pavimento del famoso palazzo della simmetria d’arte moresca, costruito intorno al 1300 d C. ad Alhambra di Granada in

Andalusia, nella Spagna meridionale. Marcus du Sautoy, Il Disordine Perfetto, pag.107, Fig. 3.8, Rizzoli 2007.

16) Notare che Thureau - Dangin traduce lunghezza e la larghezza rispettivamente dai termini: šiddu e pûtu che significano letteralmente e rispettivamente: fianco e fronte (o testa) 1938 p.226, termini che si usano ancor oggi in architettura, per indicare rispettivamente le diverse facce di un laterizio, di una costruzione o di uno scavo..

17) F.Thureau-Dangin, Textes Mathématiques Babyloniens 1938, pag.53

Otto Neugebauer,Mathematische Keilschrift Texte,1935, pag. 137 Kap. III

Jöran Friberg, Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics – World Scientific 2007 – da pag. 126 a pag. 134.

Notare inoltre, che un antico trattato Indiano, di conoscenze empirico matematiche noto come, i Sulvasutra significa letteralmente “regola delle corde”, che ci rammenta anche, i “tenditori di corde”dell’Egitto.

18) **19)** A. Bonet, L’educazione Matematica del 3/12/1989, pagg 202,204,205,206,208.

Paolo Zellini; Gnomon, una indagine sul numero, Adelphi 1999, pagg. 156, 157.

20) A. Bonet, L’educazione Matematica del 3/12/1989

21) O.Neugebauer, Le Scienze Esatte nell’Antichità, Feltrinelli 1974

22) A. Bonet L’educazione Matematica 3/12/1989, pag. 203, 207, 209, 210 e 212. Notare che la tecnica è identica sia a quella usata nell’antica Cina, sia con la tradizione vedica, sia con la geometria pratica Islamica del X secolo ad uso degli artigiani.

Probabilmente, con ragionamenti analoghi al modulo quadrato, i babilonesi avrebbero potuto sviluppare diagrammi a modulo: triangolare, pentagonale, esagonale ecc..

Jöran Friberg, Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics – World Scientific, 2007 – pag. 80

23) O.Neugebauer, Le Scienze Esatte nell’Antichità, Feltrinelli 1974 pag 60

A. Bonet, L’educazione Matematica del 3/12/1989

24) Ettore Picutti,Storia del triangolo numerico,n°185 di, Le Scienze,1984, pagg.19,20.

25) Jöran Friberg, Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics – World Scientific 2007 – pag. 78 – 81
Piedad Yuste, Estudio Geometrico de AO 17264 Theoria 20, 2005
26) O.Neugebauer, Le Scienze Esatte nell'Antichità, Feltrinelli 1974 pag 53,54
Silvio Maracchia, Storia dell'Algebra, Liguori 2005, pag. 104, nota 84
27) Ettore Picutti,Storia del triangolo numerico,n°185 di, Le Scienze,1984, pagg.,21,22.
28) Per le tavolette BM 34568,12 e BM 85196,9 vedere il Libro "Storia dell'Algebra" di Silvio Maracchia,Liguori 2005, pagg. 102 e seguenti, nonché, Jens Høyrup, Lengths, Widths, Surfaces, Springer 2002 pagg ,da 391 a 399
29)"ma non ce ne sarebbe stato bisogno", pag. 104 del Libro, Storia dell'Algebra, di cui alla nota sopracitata.
30) David Eugene Smit 1958 in " History of Mathematics" Vol 1 pagg. 29,30,31,32,33
Alcuni studiosi fanno risalire il Chou Pei Suan Ching intorno al 1200 a.C., altri intorno al I sec.a.C., altri ancora lo metterebbero in stretto rapporto col trattato, il Chiu-Chang Suan-Shu della dinastia Han (206 a.C. – 220 d.C.)
31) Enciclopedia Treccani,Storia della Scienza 2002, Vol I, pag. 98 – 99
Silvio Maracchia, Storia dell'Algebra, Liguori 2005, pag. 103, nota 82 e pag 105
32) Enciclopedia Treccani,Storia della Scienza 2002, Vol II, pag. 782 – Vol III, pagg. 512, 513
33) Paolo Zellini "Gnomon una indagine sul numero"cap.5, da pag 164 a pag 170, Adelphi edizioni 1999
34) Paolo Zellini "Gnomon una indagine sul numero"cap.2, Adelphi edizioni 1999
Silvio Maracchia, Storia dell'Algebra, Liguori 2005, da pag. 100 a pag.110.
E' pur vero che questi identici problemi fra le diverse Civiltà si ritrovano in documenti di epoche differenti e per alcuni con datazioni incerte,che si raccolgono principalmente nel cuore dell'era talassica, ma è altrettanto vero che l'origine di queste Civiltà in quanto tali, cresciute autonomamente nelle vallate dei

grandi fiumi: Nilo, Indo, Yangtzechiang, Tigri e Eufrate, hanno tutte una comune cronologia storica che fa risalire un loro denominatore comune, intorno gli inizi dell'era potamica. Carl B. Boyer, Storia della Matematica, Mondadori, 2008.

35) ipotesi grafica di Van der Waerden pag72 fig 20 e pag.145 fig48

L. Giacardi,S.C.Roero, La matematica delle civiltà .arcaiche.,1978, pag 150

36) Carl B. Boyer, Storia della Matematica, Mondadori 2008, pag. 60

37) L. Giacardi e S.C. Roero, 1978, La matematica delle civiltà arcaiche pag. 146 fig.41.

Livia Giacardi – Tullio Viola, Il calcolo del volume del tronco di piramide nella matematica Egizia (discussione sulle ipotesi più importanti già proposte) e Saggio su un possibile calcolo dei volumi di alcuni poliedri nella matematica Egizia, Estratto dagli Atti della Accademia delle Scienze di Torino Vol III (1976 -77)

Paolo Zellini "Gnomon una indagine sul numero "cap.7, Adelphi edizioni 1999, Pagg.254,255,256

38) Tullio Viola, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, Anno I n°2 dicembre 1981,Sull'elenco di terne pitagoriche ("Plimpton 322") e su un suo possibile uso nella matematica vetero-babilonese.

Carl B. Boyer,Storia della Matematica,Mondadori,2008. da pag 40 a pag 45

. O.Neugebauer, Le Scienze Esatte nell'Antichità, Feltrinelli 1974 pag 54,55,56,57,58

Jöran Friberg, Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics – World Scientific 2007 – pag. 88,89,90,91,92,93,94

39) Attilio Frajese e Lamberto Maccioni, Gli Elementi di Euclide, U.T.E.T. 1970,pag.187,188,189,190.

40) Serafina Cuomo "L'età classica ed ellenistica" sul Libro "La Matematica i luoghi e i tempi" a cura di Bartocci e Odifreddi Einaudi 2007

Carl B. Boyer "Storia della Matematica" Mondadori,2008, capitolo 4 e seguenti.

41) I pitagorici stessi, avevano ancora l'abitudine di disegnare sulla sabbia. Paolo Zellini "Gnomon una indagine sul numero "cap.2, Adelphi edizioni 1999, Pag. 72, nota 4
42) Il papiro passò dall'Egitto ai Greci nel VI secolo a.C. e si diffuse in tutto il mondo classico; il principale porto di esportazione era la città fenicia di Gubal in greco Byblos che significa papiro.
43) Nel Libro di Paolo Zellini,Gnomon, Adelphi,1999 a pag 55 leggiamo: "Pappo di Alessandria sosteneva che,ove una **costruzione** fosse possibile con riga e compasso, non si sarebbe dovuto utilizzare altri strumenti",mentre a pag 155 leggiamo inoltre: "Secondo Plutarco sarebbe stato più verosimile che il famoso sacrificio deciso da Pitagora,in occasione della scoperta del teorema che porta il suo nome, fosse invece da collegarsi all'invenzione della tecnica dell'applicazione delle aree; tecnica senza dubbio più sottile e scientificamente interessante di quella che interviene nella dimostrazione del noto teorema secondo cui il quadrato **costruito** sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo è uguale alla somma dei quadrati **costruiti** sui cateti".
Faccio notare che, anche la parola "costruzione" o "costruito" o "costruiti" è rimasta a testimoniare il collegamento con la "regola generale babilonese" più ancorata ad una tecnica artigianale costruttiva delle civiltà arcaiche che abbiamo esaminato; i cinesi analogamente, chiamavano la loro identica regola, come il procedimento di "**accumulare** i rettangoli", Joseph Needham,Scienza e Civiltà in Cina Einaudi 1985,pag 28,29,30. La stessa parola **"accumulare"** la ritroviamo anche nei testi matematici sulle antiche tavolette cuneiformi
44) La stessa idea di Pappo,come valida alternativa alla versione di Euclide I,47.,è sviluppata con una tecnica,che richiama la regola generale babilonese che ho ipotizzato e che rafforza maggiormente, l'idea dell'importazione del diagramma babilonese nel mondo della Grecia antica. Jöran Friberg, Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics – World Scientific 2007 – pag.g 74,75,76,77.
45) Storia della Teoria delle Equazioni Algebriche, Pag. 20 – 21 – 22, R. Franci, L. Toti Rigatelli, Mursia 1979

Carl B. Boyer Storia della Matematica,Mondadori,2008, pag. 93- 94 - 129 (fig. 17)
Carl B. Boyer, Storia della Matematica, Mondadori,2008, pag. 130-131 -132 (fig. 18)
Attilio Frajese e Lamberto Maccioni, Gli Elementi di Euclide, U.T.E.T. 1970
46) Paolo Zellini "Gnomon una indagine sul numero "cap.2, Adelphi edizioni 1999.
47) Silvio Maracchia, Storia dell'Algebra, Liguori 2005, pag.143,paragrafo 4.7, Arabi.
Carl B. Boyer, Storia della Matematica, Mondadori,2008, Cap. 13, l'egemonia araba, pag.264.

Calcoli algebrici e proprietà dei campi

Rocco Brunetti*

Sunto: Partendo dal calcolo di una funzione razionale in un punto la cui espressione contiene un radicale quadratico, si precisa una interessante relazione che viene poi estesa ad un campo qualsiasi e, in particolare, ai sottocampi del campo dei numeri complessi.

Abstrat: We derive a useful relation to calculate the value of a rational function in a point that contains a quadratic radical. The relation is extended to the case of a general field and in particular to subfields of the complex number field.

parole chiavi: calcolo algebrico, campo algebrico, ampliamento di campo algebrico.

1 Un calcolo algebrico ricorrente

Molte delle curve razionali che vengono studiate negli istituti secondari, in particolare nel liceo scientifico, presentano un punto di massimo e un punto di minimo le cui ascisse sono radici di un'equazione algebrica di secondo grado e si presentano nella forma $a+b\sqrt{p}$ e $a-b\sqrt{p}$, con a e b numeri razionali e p numero intero positivo.

Il calcolo delle rispettive ordinate può risultare alquanto laborioso. E', tuttavia, possibile evitare di eseguire il calcolo di una di esse tenendo presente che, se indichiamo con *f(x)* una qualunque funzione razionale della variabile x, vale la seguente proprietà:

$$\left\lfloor f\left(a+b\sqrt{p}\right)=a'+b'\sqrt{p}\right\rfloor \Leftrightarrow \left\lfloor f\left(a-b\sqrt{p}\right)=a'-b'\sqrt{p}\right\rfloor \qquad (1.1)$$

La (1.1), su opportuna sollecitazione dell'insegnante, apparirà abbastanza scontata agli alunni ma necessiterà tuttavia di un'adeguata dimostrazione. Una dimostrazione può essere la seguente.

* Dirigente scolastico a riposo e-mail: brunettirocco@yahoo.it

Dimostrazione della (1.1) – Osserviamo innanzitutto che, posto $x = x_1 + x_2\sqrt{p}$, il calcolo di $f\left(x_1 + x_2\sqrt{p}\right)$ si ottiene applicando un numero finito di operazioni razionali (addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione) a numeri sempre del tipo $a + b\sqrt{p}$. Per comodità indichiamo con $\overline{x}$ il numero $x_1 - x_2\sqrt{p}$ che chiameremo coniugato di $x = x_1 + x_2\sqrt{p}$. Facciamo innanzitutto vedere che la (1.1) è vera per ciascuna delle quattro operazioni fondamentali. Infatti, posto $y = y_1 + y_2\sqrt{p}$, risulta:

$$x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)\sqrt{p} \quad \text{e}$$
$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)\sqrt{p} = \overline{x + y}$$

$$x - y = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)\sqrt{p} \quad \text{e}$$
$$\overline{x} - \overline{y} = (x_1 - y_1) - (x_2 - y_2)\sqrt{p} = \overline{x - y}$$

$$xy = (x_1y_1 + px_2y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{p} \quad \text{e}$$
$$\overline{x}\,\overline{y} = (x_1y_1 + px_2y_2) - (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{p} = \overline{xy}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{x_1y_1 - px_2y_2}{y_1^2 - py_2^2} + \frac{-x_1y_2 + x_2y_1}{y_1^2 - py_2^2}\sqrt{p} \quad \text{e}$$
$$\frac{\overline{x}}{\overline{y}} = \frac{x_1y_1 - px_2y_2}{y_1^2 - py_2^2} - \frac{-x_1y_2 + x_2y_1}{y_1^2 - py_2^2}\sqrt{p} = \overline{\left(\frac{x}{y}\right)}$$

Supponiamo ora che la (1.1) risulti vera per tutte le espressioni razionali per le quali il calcolo di $f\left(a + b\sqrt{p}\right)$ richieda l'applicazione di al più n operazioni elementari (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione) e facciamo vedere che la (1.1) è di conseguenza verificata anche per le espressioni razionali per le quali il calcolo di $f\left(a + b\sqrt{p}\right)$ richieda l'applicazione di al più $n + 1$ operazioni elementari.

Sia dunque *f(x)* un'espressione razionale per la quale il calcolo di $f\left(a+b\sqrt{p}\right)$ richieda l'applicazione di al più $n+1$ operazioni elementari e siano x ed y i numeri a cui è applicata la (n+1)-esima operazione elementare il cui risultato è il numero $z=z_1+z_2\sqrt{p}=f\left(a+b\sqrt{p}\right)$. Ai numeri x ed y si perviene applicando le operazioni elementari non più di n volte per cui, se per il calcolo di $f\left(a-b\sqrt{p}\right)$ eseguiamo le stesse operazioni elementari nello stesso ordine, perveniamo ai due numeri $\overline{x}$ e $\overline{y}$. Eseguendo su questi ultimi la (n+1)-esima operazione elementare prima applicata ad x ed y, per l'ipotesi di ricorrenza, si otterrà $f\left(a-b\sqrt{p}\right)=\overline{z}$.
La (1.1) è così dimostrata, in virtù del

Principio di induzione matematica: *Se indichiamo con* $\left(P_n\right)_{n\in N}$ *una successione di proposizioni, supposto che* P_n *risulti vera per n=m e che la verità di* P_n *implichi la verità di* P_{n+1}*, allora* P_n *risulterà vera anche per ogni n>m.*

2 Qualche riferimento ai campi

La dimostrazione della (1.1) può essere data in maniera più immediata e anche più elegante, utilizzando il concetto di campo numerico e il concetto di isomorfismo tra campi o meglio di automorfismo di un campo.
In questo modo il nostro semplice problema può costituire occasione per una rilettura ed un approfondimento delle strutture algebriche. E ciò può assumere notevole rilevanza anche perché, con l'introduzione dell'informatica (sia ben chiaro l'introduzione delle tecnologie informatiche nella scuola è essenziale), si è andata attenuando l'attenzione verso l'algebra astratta e le strutture algebriche, fatto alquanto negativo in considerazione dell'importanza che esse assumono in matematica per il loro carattere unificante tra i vari campi di ricerca e di applicazione.
Ricordiamo che un campo *K* è un insieme nel quale sono definite due operazioni interne dette addizione e moltiplicazione tali che *K* abbia la struttura di gruppo commutativo rispetto all'addizione e *K*-{0} sia

ancora un gruppo commutativo rispetto alla moltiplicazione. Esempi di campo sono l'insieme dei numeri razionali e l'insieme dei numeri reali rispetto all'addizione e alla moltiplicazione usuali.
Ricordiamo anche che un omomorfismo del campo K nel campo K' è un'applicazione, diciamola φ, di K in K' che conserva le due operazioni di addizione e di moltiplicazione cioè che, per ogni coppia x ed y di elementi di K, verifica le seguenti due relazioni:
$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$ e $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$
L'omomorfismo φ è un isomorfismo se è anche un'applicazione biunivoca e si chiama automorfismo se è anche $K=K'$.
In tale ottica, osserviamo innanzitutto che l'insieme $A=\{a+b\sqrt{p}\}$ con a e b numeri razionali e p intero positivo costituisce un campo rispetto all'addizione e alla moltiplicazione usuali e che, pertanto, $f\left(a+b\sqrt{p}\right)$ è ancora un elemento di A ovvero un numero del tipo $a'+b'\sqrt{p}$.
Consideriamo ora l'applicazione $\varphi : A \to A$ che all'elemento $a+b\sqrt{p}$ associa l'elemento $a-b\sqrt{p}$.
L'applicazione φ fissa il campo Q ovvero (posto b=0) risulta $\varphi(a)=a$, $\forall a \in Q$. Inoltre essa è biunivoca e conserva sia la somma che il prodotto. Infatti, posto $x=x_1+x_2\sqrt{p}$ e $y=y_1+y_2\sqrt{p}$, si ha

$$\varphi(x+y)=\varphi\left[(x_1+y_1)+(x_2+y_2)\sqrt{p}\right]=(x_1+y_1)-(x_2+y_2)\sqrt{p}=$$
$$\left(x_1-x_2\sqrt{p}\right)+\left(y_1-y_2\sqrt{p}\right)=\varphi(x)+\varphi(y)$$
$$\varphi(xy)=\varphi\left[(x_1y_1+px_2y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\sqrt{p}\right]=$$
$$(x_1y_1+px_2y_2)-(x_1y_2+x_2y_1)\sqrt{p}=\left(x_1-x_2\sqrt{p}\right)\left(y_1-y_2\sqrt{p}\right)=\varphi(x)\varphi(y)$$

L'applicazione φ è, pertanto, un isomorfismo di A su se stesso ovvero un automorfismo di A e, dalle proprietà di cui godono gli isomorfismi, si deduce che risulta anche:

$$\varphi\left(x^n\right)=[\varphi(x)]^n \quad , \quad \forall x \in A \quad \text{e} \quad \forall n \in N \qquad (1.2)$$

$$\varphi(ax) = a\varphi(x) \quad , \quad \forall x \in A \quad \text{e} \quad \forall a \in Q \tag{1.3}$$

$$\varphi\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)} \quad , \quad \forall x \in A \quad \text{e} \quad \forall y \in A \tag{1.4}$$

Infine, qualunque sia la funzione razionale $f(x)$, vale la relazione

$$\varphi[f(x)] = f[\varphi(x)] \quad , \quad \forall x \in A \tag{1.5}$$

La proprietà (1.1) è così dimostrata.

3 Qualche generalizzazione

La (1.1) può essere estesa al caso di $A = \{a + bi\}$ con a e b numeri razionali ed i uguale all'unità immaginaria ($i^2 = -1$) oppure con a e b numeri reali e con i unità immaginaria.
In questi casi, posto $\varphi : a + bi \in A \to a - bi \in A$, ovvero indicata con φ l'applicazione che ad ogni numero complesso appartenente ad A fa corrispondere il suo (complesso) coniugato e posto $x = x_1 + x_2 i$ e $y = y_1 + y_2 i$, risulta:

$$\varphi(x + y) = \varphi[(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)i] = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)i =$$
$$(x_1 - x_2 i) + (y_1 - y_2 i) = \varphi(x) + \varphi(y)$$
$$\varphi(xy) = \varphi[(x_1 y_1 - x_2 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i] =$$
$$(x_1 y_1 - x_2 y_2) - (x_1 y_2 + x_2 y_1)i = (x_1 - x_2 i)(y_1 - y_2 i) = \varphi(x)\varphi(y)$$

Anche in questo caso φ è un automorfismo di A per cui risulta verificata la (1.5) e, quindi, la (1.1).

4 Ulteriori generalizzazioni

Osserviamo che nei casi esaminati φ rappresenta sempre un isomorfismo che fissa il campo a cui appartengono i generici elementi a , b ovvero risulta $\varphi(a) = a$, $\forall a \in Q$ e $\forall a \in R$ rispettivamente.
Possiamo quindi procedere come segue alla ricerca di un'eventuale ulteriore generalizzazione. Indicato con *C* un campo (ad esempio il campo dei numeri complessi), con *K* un suo sottocampo e con α un elemento di *C* non appartenente a *K*, indichiamo con

$K(\alpha)$ l'ampliamento di *K* ottenuto con l'aggiunta di α e con *f(x)* una qualsiasi funzione razionale definita in $K(\alpha)$.
Orbene, per ogni omomorfismo φ di $K(\alpha)$ in *C* che fissa *K*, risulta:

$$\varphi[f(x)] = f[\varphi(x)],\ \forall x \in K(\alpha). \tag{4.1}$$

L'esplicitazione di qualche eventuale generalizzazione della (1.1) richiede tuttavia che si sappia come si possono rappresentare gli elementi di *K(α)* e occorre anche la certezza che esistano omomorfismi di *K(α)* in C che fissano *K*.
Per semplificare supponiamo che *K(α)* sia algebrico cioè che α sia algebrico su *K* e cioè che esista un polinomio *p(x)* a coefficienti in *K* che si annulli per *x=α* .
Poiché α non appartiene a *K*, i polinomi a coefficienti in *K* che si annullano per *x=α* hanno grado non inferiore a 2 ed è possibile far vedere che quello monico (coefficiente del termine di grado massimo uguale ad 1) e di grado minimo è unico; tale polinomio si chiama anche il *polinomio minimo di α su K.*
Dalla teoria dei campi [1] [2] si sa che ogni elemento *u* di *K(α)* è rappresentabile in unico modo mediante un'espressione intera in α a coefficienti in *K.*
Più precisamente se *n* è il grado del polinomio minimo *p(x)* di α su *K,* risulta $u = a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + ... + a_1\alpha + a_0$ con i coefficienti a_i in *K*.
Per quanto riguarda l'esistenza degli omomorfismi, occorre tenere presente la seguente proprietà.

Proprietà I – *Siano C un campo e K un suo sottocampo, p(x) un polinomio a coefficienti in K, α un elemento di C e φ un omomorfismo di K(α) in C che fissa K . Allora se p(x) si annulla per x=α, p(x) si annulla anche per x=φ(α).*

Dimostrazione della I - Infatti se φ è un tale omomorfismo, esso lascia fermo ogni elemento di *K* e conserva le operazioni di somma e di prodotto per cui risulta

$$\varphi(a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + ... + a_1\alpha + a_0) = a_{n-1}[\varphi(\alpha)]^{n-1} +$$
$$+ a_{n-2}[\varphi(\alpha)]^{n-2} + ... + a_1[\varphi(\alpha)] + a_0$$

Pertanto se è $a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + ... + a_1\alpha + a_0 = 0$, si ha anche:
$$a_{n-1}[\varphi(\alpha)]^{n-1} + a_{n-2}\left[\varphi(\alpha)^{n-2}\right] + ... + a_1[\varphi(\alpha)] + a_0 = 0$$

Pertanto se *p(x)* è il polinomio monico irriducibile su *K* che si annulla per x=α, ogni omomorfismo di *K* in C trasforma α in un'altra radice dello stesso polinomio.

Proprietà II – *Siano C un campo e K un suo sottocampo, α un elemento di C non appartenente a K algebrico su K, p(x) il polinomio minimo di α su K. Allora, per ogni altra radice β di p(x), esiste un unico isomorfismo ψ di K(α) in K(β) che fissa K e tale che risulti ψ(α)=β.*

Dimostrazione della II - osserviamo preliminarmente che, essendo p(x) il polinomio minimo di α su *K* , *p(x)* è anche il polinomio minimo su *K* di ogni altra sua radice e quindi anche di β. Anche *K*(β) è, pertanto, costituito dagli elementi di *C* del tipo $\sum_{i=0}^{n-1} c_i\beta^i$, essendo n il grado di *p(x)*.

L'isomorfismo ψ si ottiene associando all'elemento di *K*(α) $u = \sum_{i=0}^{n-1} c_i\alpha^i$ l'elemento di *K*(β) $u' = \sum_{i=0}^{n-1} c_i\beta^i$ dove gli elementi c_i sono in *K*. Che tale applicazione sia biunivoca è evidente, che essa lasci invariato ogni elemento di *K* discende dalla considerazione che ogni elemento di *K* è un elemento di *K*(α) nel quale risulti $c_i=0, \ \forall i>0$ e che ad α faccia corrispondere β discende dalla considerazione che α è l'elemento di *K*(α) che si ottiene ponendo $c_1=1$ e , $c_i = 0, \forall i \neq 1$.

Verifichiamo ora che ψ è effettivamente un omomorfismo. Posto $v=\sum_{i=0}^{n-1} d_i\alpha^i$, si ottiene $u+v=\sum_{i=0}^{n-1}(c_i+d_i)\alpha^i$ e quindi

$$\psi(u+v)=\psi\left(\sum_{i=0}^{n-1}(c_i+d_i)\alpha^i\right)=$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}(c_i+d_i)\beta^i=\sum_{i=0}^{n-1}c_i\beta^i+\sum_{i=0}^{n-1}d_i\beta^i=\psi(u)+\psi(v)$$

Posto ora $c(x)=\sum_{i=0}^{n-1}c_i x^i$, $d(x)=\sum_{i=0}^{n-1}d_i x^i$ e $g(x)=c(x)d(x)$, si ottiene:

$uv=c(\alpha)d(\alpha)=g(\alpha)=\sum_{i=0}^{2(n-1)}g_i\alpha^i$ con g_i elementi di Q e

$$\psi(u)\psi(v)=c(\beta)d(\beta)=g(\beta)=\sum_{i=0}^{2(n-1)}g_i\beta^i$$

Si ottiene pertanto $\psi(uv)=\psi(u)\psi(v)$

L'applicazione ψ conserva la somma e il prodotto ed è quindi un omomorfismo.

Osserviamo che gli elementi $g_i\alpha^i$ con $i>n-1$, essendo in $K(\alpha)$, si possono rappresentare tutti con un'espressione razionale intera in α di grado n-1, quindi possiamo scrivere

$g_k\alpha^k=\sum_{i=0}^{n-1}f_{k,i}\alpha^i$, $\forall k\in\{n,n+1,......,2(n-1)\}$ e, di conseguenza,

$$uv=\sum_{k=n}^{2(n-1)}\left(\sum_{i=0}^{n-1}f_{k,i}\alpha^i\right)+\sum_{i=0}^{n-1}g_i\alpha^i=\sum_{i=0}^{n-1}\left(g_i+\sum_{k=n}^{2(n-1)}f_{k,i}\right)\alpha^i=\sum_{i=0}^{n-1}h_i\alpha^i \quad \text{e}$$

analogamente $\psi(uv)=\psi(u)\psi(v)=\sum_{i=0}^{n-1}\left(g_i+\sum_{k=n}^{2(n-1)}f_{k,i}\right)\beta^i=\sum_{i=0}^{n-1}h_i\beta^i$

Pertanto, detta $f(x)$ una qualunque funzione razionale nella indeterminata x, è verificata la seguente relazione

$$\left\{f\left(\sum_{i=0}^{n-1}c_i\alpha^i\right)=\sum_{i=0}^{n-1}c_i'\alpha^i\right\}\Leftrightarrow\left\{f\left(\sum_{i=0}^{n-1}c_i\beta^i\right)=\sum_{i=0}^{n-1}c_i'\beta^i\right\} \qquad (4.2)$$

La (4.2) è una generalizzazione della (1.1). Esplicitiamola in qualche caso particolare.
Esaminiamo, ad esempio, il caso di K coincidente con il campo Q dei numeri razionali e di $\alpha = \sqrt[3]{5}$. Il numero α è radice del polinomio monico irriducibile $p(x) = x^3 - 5$ e le altre radici di $p(x)$ sono $\alpha_1 = \dfrac{\sqrt[3]{5}(-1 - i\sqrt{3})}{2}$ e $\alpha_2 = \dfrac{\sqrt[3]{5}(-1 + i\sqrt{3})}{2}$.
Se, ad esempio, consideriamo l'isomorfismo di Q(α) su Q(α_1), la (4.2) si specializza nella seguente

$$\left\{f\left(c_2\sqrt[3]{25} + c_1\sqrt[3]{5} + c_0\right) = c_2'\sqrt[3]{25} + c_1'\sqrt[3]{5} + c_0'\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} f\left[c_2\left(\dfrac{\sqrt[3]{5}(-1 - i\sqrt{3})}{2}\right)^2 + c_1\dfrac{\sqrt[3]{5}(-1 - i\sqrt{3})}{2} + c_0\right] = \\ c_2'\left(\dfrac{\sqrt[3]{5}(-1 - i\sqrt{3})}{2}\right)^2 + c_1'\dfrac{\sqrt[3]{5}(-1 - i\sqrt{3})}{2} + c_0' \end{array}\right\} \tag{4.3}$$

Esaminiamo adesso, sempre con K coincidente con il campo Q dei numeri razionali, il caso di $\alpha = \sqrt[4]{5}$. Il numero α è radice del polinomio monico irriducibile $p(x) = x^4 - 5$ e le altre radici di $p(x)$ sono $-\sqrt[4]{5}$, $i\sqrt[4]{5}$ e $-i\sqrt[4]{5}$. Gli elementi di $Q\left(\sqrt[4]{5}\right)$ sono del tipo $u = c_3\sqrt[4]{125} + c_2\sqrt[4]{25} + c_1\sqrt[4]{5} + c_0$, gli elementi di $Q\left(-i\sqrt[4]{5}\right)$ sono del tipo $v = d_3 i\sqrt[4]{125} - d_2\sqrt[4]{25} - d_1 i\sqrt[4]{5} + d_0$.
Se consideriamo l'isomorfismo di $Q\left(\sqrt[4]{5}\right)$ su $Q\left(-i\sqrt[4]{5}\right)$ che all'elemento $c_3\sqrt[4]{125} + c_2\sqrt[4]{25} + c_1\sqrt[4]{5} + c_0$ associa l'elemento $c_3\left(-i\sqrt[4]{5}\right)^3 + c_2\left(-i\sqrt[4]{5}\right)^2 + c_1\left(-i\sqrt[4]{5}\right) + c_0 = c_3 i\sqrt[4]{125} - c_2\sqrt[4]{25} - c_1 i\sqrt[4]{5} + c_0$
la (4.2) diventa

$$\begin{array}{l} \left\{f\left(c_3\sqrt[4]{125} + c_2\sqrt[4]{25} + c_1\sqrt[4]{5} + c_0\right) = c_3'\sqrt[4]{125} + c_2'\sqrt[4]{25} + c_1'\sqrt[4]{5} + c_0'\right\} \Leftrightarrow \\ \left\{f\left(c_3 i\sqrt[4]{125} - c_2\sqrt[4]{25} - c_1 i\sqrt[4]{5} + c_0\right) = c_3' i\sqrt[4]{125} - c_2'\sqrt[4]{25} - c_1' i\sqrt[4]{5} + c_0'\right\} \end{array} \tag{4.4}$$

Osserviamo che nel primo esempio si ha $Q\left(\sqrt[3]{5}\right) \subset Q(\alpha_1) = Q(\alpha_2)$.

Nel secondo esempio si ha $Q\left(\sqrt[4]{5}\right)=Q\left(-\sqrt[4]{5}\right)\subset Q\left(i\sqrt[4]{5}\right)=Q\left(-i\sqrt[4]{5}\right)$. Tuttavia, in generale, dette α_1, α_2, …….., α_{n-1} le altre radici del polinomio minimo di α su Q, i campi $Q(\alpha_1)$, $Q(\alpha_2)$, ………, $Q(\alpha_{n-1})$ non includono $Q(\alpha)$. Ciò è vero, in particolare, nel caso in cui l'equazione *p(x)*=0 non è risolubile per radicali.
Riprendiamo adesso il caso generale sempre con *K* coincidente con il campo razionale *Q* e *C* con quello dei numeri complessi.
Vale la seguente proprietà:

Proprietà III – *Sia α un elemento di C non appartenente a Q e algebrico, p(x) il suo polinomio minimo su Q ed* α_1, α_2, *………,* α_{n-1} *le altre radici di p(x) con n uguale al grado di p(x). Ogni omomorfismo ψ di Q(α) in* $Q(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots, \alpha_{n-1})$ *che fissa Q può essere prolungato in un automorfismo di* $Q(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots, \alpha_{n-1})$.

Per definire il nostro automorfismo, diciamolo φ, basta assegnare l'immagine ad ogni radice di *p(x)* che non appartenga a *Q*(α). Detta β una tale radice indichiamo con *q(x)* il suo polinomio minimo su *Q(α)* e osserviamo che si può scrivere $p(x)=q(x)(x-\alpha)\prod(x-\alpha_i)$ ove il prodotto è esteso a tutti gli indici che individuano le altre radici di *p(x)* appartenenti a *Q*(α). In virtù della proprietà II, esiste un omomorfismo di *Q*(α, β) in $Q(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$ che fissa *Q* e porta β in un'altra radice di *q(x)* e, quindi, in un'altra radice di *p(x).* Così continuando la III viene dimostrata.
Dalla procedura seguita si comprende che si possono ottenere diversi automorfismi. Detti automorfismi hanno tutti la caratteristica di lasciare fissi tutti gli elementi di *Q* e di permutare tra loro le radici di *p(x)*. Pertanto ciascuno di essi definisce ed è definito da una sostituzione sulle radici di *p(x)*. Occorre tuttavia precisare che ai predetti automorfismi non corrispondono tutte le sostituzioni su dette radici ma soltanto le sostituzioni *ammissibili*. Una sostituzione delle radici è infatti ammissibile soltanto se soddisfa i vincoli imposti dalla struttura dell'equazione *p(x)* = 0, ovvero dai coefficienti di *p(x)*.
Nel caso del primo esempio le radici α, α_1, α_2 devono soddisfare l'equazione $x^3-5=(x-\alpha)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)=0$ e quindi le condizioni:

$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \ , \quad \alpha\alpha_1 + \alpha\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2 = 0 \, , \quad \alpha\alpha_1\alpha_2 = -5 \qquad (4.5)$$

$$\alpha_2 = -(\alpha + \alpha_1) \ , \ \alpha^2 + \alpha\alpha_1 + \alpha_1^{\ 2} = 0 \ , \ \alpha^2\alpha_1 + \alpha\alpha_1^{\ 2} = 5 \qquad (4.6)$$

Dalle (4.6) si vede che α può essere scambiata con α_1. Analogamente, ricavando dalla prima delle (4.5) una qualsiasi delle radici, le altre due sono scambiabili. Si vede, quindi, che delle sette sostituzioni non banali sulle tre radici sono ammissibili soltanto tre ovvero quelle che scambiano fra loro due radici e lasciano ferma l'altra.

Con riferimento al secondo esempio, dette α_1, α_2, α_3, α_4 le quattro radici dell'equazione $x^4 - 5 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4) = 0$, esse devono verificare le seguenti relazioni:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \, , \qquad (4.7)$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 = 0 \qquad (4.8)$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -5 \qquad (4.9)$$

Ricavando α_1 dalla (4.7) e sostituendo nella seconda, si ottiene :

$$(\alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_4)(\alpha_3 + \alpha_4) = 0 \qquad (4.10)$$

Per la legge di annullamento del prodotto, la (4.10) implica che sia verificata almeno una delle tre uguaglianze $\alpha_2 = -\alpha_3$, $\alpha_2 = -\alpha_4$, $\alpha_3 = -\alpha_4$

Ponendo $\alpha_2 = -\alpha_3$, dalla (4.7) si ottiene $\alpha_4 = -\alpha_1$ e, dalle (4.8) e (4.9) si ottengono le seguenti due relazioni:

$$\alpha_1^{\ 2} + \alpha_2^{\ 2} = 0 \ , \ \alpha_1^{\ 2}\alpha_2^{\ 2} = -5 \qquad (4.11)$$

Le nostre radici sono pertanto: α_1, α_2, $-\alpha_2$, $-\alpha_1$ e dalle (4.11) si vede che è possibile scambiare α_1 con $-\alpha_1$, α_2 con $-\alpha_2$, α_1 con α_2 oppure con $-\alpha_2$.

Posto $\alpha_1 = \sqrt[4]{5}$ e $\alpha_2 = i\sqrt[4]{5}$, le sostituzioni ammissibili sulle radici sono pertanto le seguenti:

$$e = \begin{pmatrix} \sqrt[4]{5} & i\sqrt[4]{5} & -i\sqrt[4]{5} & -\sqrt[4]{5} \\ \sqrt[4]{5} & i\sqrt[4]{5} & -i\sqrt[4]{5} & -\sqrt[4]{5} \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} \sqrt[4]{5} & i\sqrt[4]{5} & -i\sqrt[4]{5} & -\sqrt[4]{5} \\ -\sqrt[4]{5} & i\sqrt[4]{5} & -i\sqrt[4]{5} & \sqrt[4]{5} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} \sqrt[4]{5} & i\sqrt[4]{5} & -i\sqrt[4]{5} & -\sqrt[4]{5} \\ \sqrt[4]{5} & -i\sqrt[4]{5} & i\sqrt[4]{5} & -\sqrt[4]{5} \end{pmatrix}, \ \sigma_4 = \begin{pmatrix} \sqrt[4]{5} & i\sqrt[4]{5} & -i\sqrt[4]{5} & -\sqrt[4]{5} \\ -\sqrt[4]{5} & -i\sqrt[4]{5} & i\sqrt[4]{5} & \sqrt[4]{5} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} \sqrt[4]{5} & i\sqrt[4]{5} & -i\sqrt[4]{5} & -\sqrt[4]{5} \\ i\sqrt[4]{5} & \sqrt[4]{5} & -\sqrt[4]{5} & -i\sqrt[4]{5} \end{pmatrix}, \ \sigma_6 = \begin{pmatrix} \sqrt[4]{5} & i\sqrt[4]{5} & -i\sqrt[4]{5} & -\sqrt[4]{5} \\ -i\sqrt[4]{5} & -\sqrt[4]{5} & \sqrt[4]{5} & i\sqrt[4]{5} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_7 = \begin{pmatrix} \sqrt[4]{5} & i\sqrt[4]{5} & -i\sqrt[4]{5} & -\sqrt[4]{5} \\ -i\sqrt[4]{5} & \sqrt[4]{5} & -\sqrt[4]{5} & i\sqrt[4]{5} \end{pmatrix},\ \sigma_8 = \begin{pmatrix} \sqrt[4]{5} & i\sqrt[4]{5} & -i\sqrt[4]{5} & -\sqrt[4]{5} \\ i\sqrt[4]{5} & -\sqrt[4]{5} & \sqrt[4]{5} & -i\sqrt[4]{5} \end{pmatrix}$$

Esse individuano, oltre a quello identico, altri sette automorfismi del campo di spezzamento del polinomio x^4-5.

Dalla teoria dei campi [1] sappiamo che gli elementi di $Q(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots, \alpha_{n-1})$ sono del tipo $u = \dfrac{g(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots.., \alpha_{n-1})}{h(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots.., \alpha_{n-1})}$ con g ed h polinomi in n variabili a coefficienti in Q e con $h(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots., \alpha_{n-1}) \neq 0$.

Con ragionamenti analoghi a quelli svolti nella dimostrazione della proprietà II, si può far vedere che l'applicazione $\phi : \dfrac{g(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots.., \alpha_{n-1})}{h(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots.., \alpha_{n-1})} \rightarrow \dfrac{g(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots.., \alpha_{i_n})}{h(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots.., \alpha_{i_n})}$, essendo $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots\ldots\ldots, \alpha_{i_n}$ una permutazione ammissibile delle radici di $p(x)$, è un automorfismo su $Q(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots, \alpha_{n-1})$ che fissa Q.

Pertanto la (1.1) si può generalizzare nella seguente relazione:

$$\begin{aligned} &\left\{ f\left(\frac{g(\alpha_1, \alpha_2, \ldots., \alpha_n)}{h(\alpha_1, \alpha_2, \ldots., \alpha_n)} \right) = \frac{g'(\alpha_1, \alpha_2, \ldots., \alpha_n)}{h'(\alpha_1, \alpha_2, \ldots., \alpha_n)} \right\} \Leftrightarrow \\ &\left\{ f\left(\frac{g(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots., \alpha_{i_n})}{h(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots., \alpha_{i_n})} \right) = \frac{g'(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots., \alpha_{i_n})}{h'(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots., \alpha_{i_n})} \right\} \end{aligned} \qquad (4.12)$$

essendo $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots.. & \alpha_n \\ \alpha_{i_1} & \alpha_{i_2} & \ldots.. & \alpha_{i_n} \end{pmatrix}$ una sostituzione ammissibile sulle radici dell'equazione $p(x) = 0$.

Riferimenti bibliografici

[1] M Curzio, *Lezioni di algebra*, Napoli, Liguori, 1963

[2] G. Zappa e R. Permutti, *Gruppi corpi equazioni*, Milano, Feltrinelli, 1963

Il piano proiettivo complesso: un utile strumento didattico

Stefano Geronimo[1] - Alberto Trotta[2]

Sunto: spesso nella didattica quotidiana alcune questioni come lo studio delle curve algebriche piane, in particolare le coniche, e la risoluzione dei sistemi algebrici vengono affrontate in maniera incompleta per non aver introdotto il concetto di piano proiettivo complesso, che come vedremo, risulta un utile strumento didattico.

Abstract: Sometimes in the didactis some matters, as the study of the algebraic curves, in particular the conic curves and the solution of the algebraic systems, are treated in an incomplete way.This fact is due to have not introduced the concept of the complexe proiective plane, that, as it will result in the detailed treatment, represents an useful didactic tool.

Parole chiavi: punto improprio, retta impropria, piano proiettivo complesso, curve algebriche piane, coniche, sistemi algebrici

1. Premessa

La geometria analitica, sorta nella prima metà del 17° secolo, stabilisce un legame tra curve del piano ed equazioni algebriche in due variabili.
Il suo sviluppo originato da una idea semplicissima (l'introduzione delle coordinate), si svolse in poche decine di anni.
All'inizio del 600 matematici eminenti si erano già avvicinati all'idea di una geometria analitica, ma due furono coloro che videro con chiarezza la possibilità di iniziare un nuovo capitolo della matematica:
Pierre Fermat, consigliere parlamentare a Tolosa e matematico di rinomanza mondiale e Cartesio.
E' Cartesio che tuttavia viene considerato il fondatore della geometria analitica, il quale fu l'unico come filosofo a porre la questione in tutta la sua generalità.

---

[1] S. Geronimo: già dirigente scolastico, presidente della sezione Mathesis di Roma.
[2] A. Trotta: Liceo Scientifico Innocenzo XII – Anzio (RM), Presidente della Mathesis Anzio.

Cartesio voleva dare un metodo generale per la soluzione di tutti i problemi di geometria.
La sua teoria si basa su due idee: l'introduzione di coordinate e la rappresentazione, per mezzo di queste, di qualsiasi equazione algebrica in due incognite come curva del piano [1].
È del 1637 la pubblicazione di una sua importante opera filosofica, Discours de la Métode, cui sono annessi tre saggi (Dioptrique, Metéores, Geometrie), di questi il terzo è una esposizione sufficientemente ampia, anche se un po' confusa della teoria matematica che da allora fu chiamata geometria analitica.
Una tappa importante nello sviluppo della geometria analitica fu l'apparizione nel 1748 dell'opera di Eulero "Introduzione all'analisi" nel cui 2° volume, fra l'altro compariva, per la prima volta una esposizione chiara della geometria analitica del piano con un particolareggiato studio delle curve del 2° ordine, assai vicina a quella che si trovava nei testi moderni sull'argomento. Vi si trovava pure uno studio delle curve di ordine superiore. Fu questo il primo corso di geometria analitica nel senso moderno della parola.
A questo punto è d'uopo ricordare ciò che Andreas Speiser, matematico svizzero, morto nel 1970, disse a proposito di Eulero:
"Dall'epoca irripetibile dei Greci la matematica non ha avuto un momento più felice di quello in cui è vissuto Eulero. A lui è stato riservato il compito di dare una forma completamente diversa alla matematica e di trasformarla in quella costruzione, che è oggigiorno". [6]
Scopo fondamentale della geometria analitica è la traduzione analitica o algebrica di un problema geometrico, stabilendo per così dire un parallelismo fra fatti geometrici e fatti algebrici. La trattazione dei problemi geometrici talvolta porta alla risoluzione di equazioni algebriche di grado superiore al primo dando luogo a soluzioni non tutte reali.
Pertanto per enunciare teoremi senza restrizioni e dare ai risultati dei problemi geometrici tutta la generalità possibile, sarà necessario in un primo momento ampliare la retta col suo punto improprio (retta proiettiva) e naturalmente ampliare il piano con la retta impropria (piano proiettivo). Un nuovo tipo di ampliamento del piano sarà il piano proiettivo complesso, molto più astratto ottenuto con l'introduzione degli elementi immaginari.
Volendo storicamente sintetizzare possiamo asserire che i progressi essenziali dovuti a questo brusco rinnovamento dalla geometria del piano affine reale a quello proiettivo complesso sono:

- la nozione di elemento all'infinito (punto e retta) introdotta da Desargues nel XVII secolo, viene poi riabilitata e sistematicamente utilizzata da Poncelet, che fa così del piano proiettivo il quadro di tutti i fenomeni geometrici;
- al tempo stesso con Monge e soprattutto con Poncelet, si effettua il passaggio alla geometria proiettiva complessa. La nozione di punto immaginario, sporadicamente usata durante il XVIII secolo, è ora sfruttata, insieme con quelle di punto e retta all'infinito per dare degli enunciati indipendenti dalle "accidentalità delle figure" della geometria affine reale [4].

Il passaggio alla geometria proiettiva complessa può ritenersi quindi un utile strumento atto ad eliminare alcune incompletezze nello studio delle curve algebriche piane, in particolare le coniche, e nella risoluzione dei sistemi algebrici.

2. Punto improprio e retta ampliata – Retta impropria e piano ampliato

Consideriamo nel piano affine-euclideo due rette r ed s incidenti nel punto P (fig. 1).

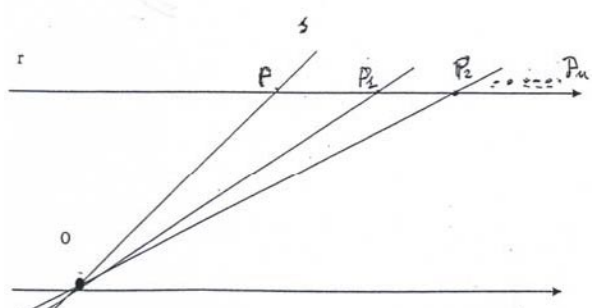


Fig. 1

L'intuizione geometrica ci suggerisce che se facciamo ruotare con continuità la retta s in uno qualunque dei due versi, per esempio nel verso orario, intorno al punto O, posto al di fuori della retta fissa r, il punto d'intersezione P si allontana sempre di più sulla retta r se s tende a disporsi parallelamente a r, assumendo la posizione r'.

In tal caso siamo portati a dire che anche al limite le due rette **r** ed **s** hanno ancora un punto in comune, limite del punto P, non nel senso ordina-

rio della parola, ma perché acquistano al limite qualche cosa di comune che è la direzione. Chiameremo tale punto improprio o punto all'infinito della retta r.
Aggregando all'insieme dei punti (propri) $P_1, P_2, \ldots, P_n$ della retta r anche il suo punto improprio si ottiene la retta ampliata o retta proiettiva.
Tenuto conto che due rette del piano hanno uno stesso punto improprio se hanno la stessa direzione cioè se sono parallele ne consegue che tutti i punti impropri del piano si ottengono prendendo quelli individuati dalle rette del piano che passano per un qualunque suo punto proprio.
Questo insieme di punti impropri costituisce la retta impropria o retta all'infinito del piano.
Possiamo quindi dire:
- nel piano ogni retta possiede un punto improprio e l'insieme dei punti impropri del piano costituisce la retta impropria;
- il piano cui si pensa aggregata la sua retta impropria si dice piano proiettivo o piano ampliato.

Introdotto il piano proiettivo possiamo quindi dire:
nel piano proiettivo due rette individuano sempre un punto in comune ad entrambe e due punti distinti individuano sempre una retta che li contiene.

3. Coordinate omogenee

Le ordinarie coordinate cartesiane non si prestano a rappresentare sia i punti propri che quelli impropri.
Per esempio, nel piano in cui sia fissato un sistema di riferimento, rappresentando un punto con due coordinate (x,y), potremmo solo dire che per un punto improprio entrambe tali coordinate divengono infinitamente grandi ma non riusciremmo a distinguere un punto improprio da un altro cioè una direzione dall'altra.
E' ora necessario introdurre un tipo di coordinate adatte a rappresentare tutti i punti sia propri che impropri del piano ampliato. Queste coordinate, che vengono dette coordinate cartesiane omogenee, non hanno una definizione autonoma, ma si basano su un sistema di coordinate cartesiane eventualmente generali.
Esse consistono in tre numeri, x_0, x_1, x_2.
Se x e y sono coordinate cartesiane di un punto proprio P, posto

$$x = \frac{x_1}{x_0} \qquad y = \frac{x_2}{x_0} \qquad (x_0 \neq 0) \tag{3.1}$$

i tre numeri x_0, x_1, x_2, diconsi coordinate omogenee del punto P.
Dalle (3.1) si ha che, mentre le coordinate omogenee x_0, x_1, x_2 (con $x_0 \neq 0$) determinano il punto P, il punto P determina le proprie coordinate non omogenee a meno di un fattore di proporzionalità diverso da zero, giacchè:

$$x = \frac{x_1}{x_0} = \frac{kx_1}{kx_0} \qquad y = \frac{x_2}{x_0} = \frac{kx_2}{kx_0} \qquad (k\,\varepsilon R°) \tag{3.2}$$

Con l'introduzione delle coordinate omogenee, sia i punti propri che i punti impropri si rappresentano quindi allo stesso modo, con terne di numeri reali x_0, x_1, x_2 essendo $x_0 \neq 0$ per i punti propri ed $x_0 = 0$ per i punti impropri.
E' immediato che al punto proprio P (x,y) si possono attribuire coordinate omogenee (1, x, y).
Le coordinate cartesiane omogenee pongono quindi una corrispondenza biunivoca tra i punti propri ed impropri del piano e le terne dei numeri reali (x_0, x_1, x_2), esclusa la terna (0,0,0), definite a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

4. Equazione in coordinate omogenee di una retta nel piano

Consideriamo con riferimento ad un sistema cartesiano (x,y) una retta propria r di equazione

$$ax + by + c = 0 \tag{4.1}$$

Tale equazione con le sostituzioni (3.1) diventa

$$a = \frac{x_1}{x_0} + b\frac{x_2}{x_0} + c = 0 \tag{4.2}$$

cioè

$$ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0 \tag{4.3}$$

Per distinguere la (4.1) dalla (4.3), d'ora in poi diremo che la prima è l'equazione della retta in coordinate non omogenee, mentre la seconda è l'equazione della retta in coordinate omogenee.
L'equazione (4.3) è soddisfatta dalle coordinate di tutti i punti propri del-

la retta r, per i quali è $x_0 \neq 0$, ma è anche soddisfatta dalla terna $x_0 = 0$, $x_1 = b$, $x_2 = -a$, coordinate del punto improprio della retta r.
Se si tengono fissi a e b e si varia comunque c, il punto improprio P (0, b, -a) rimane sempre lo stesso.
Ne segue che tutte le rette parallele alla retta (4.3) passano tutte per lo stesso punto improprio.
Vi è dunque corrispondenza biunivoca tra punto improprio e direzione.
Escludendo il caso in cui a = b = c = 0 per cui la (4.3) svanisce, rimane da considerare il caso a = b = 0 e c ≠ 0 per cui la (4.3) si riduce a

$$x_0 = 0 \tag{4.4}$$

Questa equazione è soddisfatta dalle coordinate di tutti i punti impropri del piano e può quindi interpretarsi come equazione della retta impropria del piano.

5. Piano proiettivo complesso

Un nuovo tipo di ampliamento del piano proiettivo, molto più astratto è il piano proiettivo complesso, ottenuto con l'introduzione degli elementi immaginari.
Il primo passo consiste nel definire come punti immaginari o punti complessi le coppie ordinate di numeri complessi. Il passo successivo è quello di sostituire le coppie di numeri complessi, con le terne di numeri complessi considerate a meno di un fattore non nullo, anch'esso complesso.
Questo corrisponde a una sorta di coordinate omogenee e porta a classificare i punti in propri ed impropri.
Così il punto rappresentato in coordinate omogenee dalla terna (1+i;-2+4i;-9+i) è proprio ed è anche rappresentabile con la terna (1;1+3i;-4+5i), ottenuta dividendo le coordinate della terna originaria per (1+i). Precisiamo che la terna (1;1+3i;-4+5i) è equivalente in coordinate non omogenee alla coppia (1+3i; -4+5i). Il punto (0; 1+4i; 2-i) è invece improprio. L'uso delle coordinate omogenee può far sembrare, a prima vista immaginario un punto che è invece reale. Per esempio il punto rappresentato dalla terna (6+2i;-3-i;12+4i) si può rappresentare con (1;-0,5;2) ottenuto dalla terna di partenza dividendo ciascun termine per (6+2i) ed è perciò un punto reale e proprio di coordinate non omogenee (-0,5;2). Inoltre le due rette immaginarie di equazioni:

$$y - y_0 = \pm\, i(x - x_0) \tag{5.1}$$

son dette rette isotrope del fascio di centro P $(x_0;y_0)$ ed hanno la proprietà di essere ciascuna perpendicolare a se stessa: Al variare del punto P $(x_0;y_0)$ descrivono nel piano nel piano proiettivo complesso i due fasci impropri di equazioni:

$$y = ix+h \qquad e \qquad y = -ix+h \tag{5.2}$$

con $h = x_0 + iy_0$ e $k = x_0 - iy_0$ due parametri complessi arbitrari.
Passando a coordinate omogenee le (5.2) diventano

$$x_2 = ix_1+ hx_0 \qquad e \qquad x_2 = -ix_1+kx_0 \tag{5.3}$$

I centri di questi due fasci impropri sono i punti J(0;1;i) e J'(0;1;-i), detti punti ciclici, per il fatto che ogni circonferenza del piano in coordinate omogenee passa per essi. Possiamo quindi dire che il piano proiettivo complesso è il piano affine-euclideo ampliato con i punti sia propri che immaginari. Un elemento del piano proiettivo complesso è perciò una terna di numeri complessi esclusa la terna nulla, alterabile per un fattore complesso.

6. Curve algebriche piane e ricerca dei punti impropri

Una curva piana si dice algebrica quando può rappresentarsi mediante coordinate cartesiane con una equazione algebrica $f(x,y) = 0$ in cui $f(x,y) = 0$ è un polinomio in x,y, a coefficienti costanti.
Se il polinomio è di grado n $(n \geq 1)$, l'equazione di una curva algebrica può quindi scriversi così

$$f(x,y) = \sum p,q \;\; a_{p,q} x^p x^q = 0 \tag{6.1}$$

con p,q interi positivi e tali che $p + q \pm n$.
Se nella (6.1), raggruppiamo i termini di egual grado, possiamo scriverla più esplicitamente così:

$$f(x,y) \equiv \varphi_n(x,y) + \varphi_{n-1}(x,y) + \ldots + \varphi_1(x,y) + \varphi_0 = 0 \tag{6.2}$$

avendo indicato con $\varphi_k(x,y)$ $(o \leq k \leq n)$ l'insieme dei termini di grado k complessivamente in (x,y) e con φ_0 il termine noto. Lo studio delle curve algebriche piane si semplifica e le loro proprietà possono enunciarsi in forma generale, se esse si pensano in un piano ampliato sia coi punti impropri, sia coi punti immaginari. Passando alle coordinate omogenee la (6.2) assume la forma

$$f(x_0,x_1,x_2) = \varphi_n(x_1,x_2) + x_0\varphi_{n-1}(x_1,x_2)+.+x_{0n-1}\varphi_1(x_1x) + x_{n0}\varphi_0=0 \tag{6.3}$$

dove $f(x_0,x_1,x_2)$ è un polinomio omogeneo di grado n nelle coordinate omogenee x_0,x_1,x_2. D'ora in poi indicheremo con Cn una curva algebrica piana d'ordine n, intendendosi per ordine il numero dei punti (reali o immaginari, propri o impropri,distinti o coincidenti) di intersezione della Cn con una retta che non sia sua componente. Cartesio ha studiato le linee piane rappresentate da una equazione di 2° grado in due variabili la cui forma generale è del tipo

$$f(x,y) \equiv Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{6.4}$$

mostrando [2] che tale equazione rappresenta in generale un'ellisse, una iperbole o una parabola, curve ben note, sotto il nome di coniche ai matematici dell'antichità.
Già gli antichi greci avevano studiato in modo particolareggiato tali linee ottenute come intersezione di un cono circolare retto con un piano.
Mediante opportune trasformazioni di coordinate (rotazione e traslazione) da una equazione simile alla (6.4) e cioè del tipo

$$f(x,y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{6.5}$$

si ottengono, fra l'altro, le equazioni canoniche dell'ellisse, dell'iperbole e della parabola [3] alle quali elementarmente si può pervenire considerando queste curve come particolari luoghi geometrici.

7. Teorema di Bezout-Eulero. Punti impropri di una curva algebrica piana

Grande importanza si attribuì nel XVII secolo al problema relativo alla intersezione delle curve algebriche piane.
In relazione a due sole curve algebriche C^n e C^m, appartenenti allo stesso piano,di equazioni rispettive:

$$f(x,y) = 0 \qquad \text{e} \qquad g(x,y) = 0 \tag{7.1}$$

la questione che si pose subito in evidenza fu quella di determinare il numero dei punti di intersezione.
Tale problema geometrico si traduce nell'equivalente problema algebrico di risolvere il seguente sistema nelle incognite x e y

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \tag{7.2}$$

Per ottenere le ascisse dei punti di intersezione bisogna eliminare la y fra le (7.1), considerate come equazioni algebriche in y a coefficienti polinomiali in x e ottenere una equazione in x. Per una trattazione più rigorosa e completa dell'argomento si veda in proposito la [7].
Intanto Newton, Leibniz e prima di loro lo stesso Fermat, possedevano già dei metodi generali di eliminazione. Ma solamente Mac-Laurin nel XVIII secolo avanzò la congettura che il numero dei punti di intersezione fosse in generale uguale a nm (risultato conosciuto da Apollonio per n = m = 2).
Eulero che aveva fatto dei tentativi infruttuosi per dimostrare questa congettura, si rese subito conto delle difficoltà legate alla presenza di radici multiple o immaginarie dell'equazione che fornisce le ascisse dei punti di intersezione o all'abbassamento del grado di questa equazione e pensò di ristabilire l'enunciato generale nm con l'introduzione di punti immaginari o di punti all'infinito limitandosi solo a considerare alcuni casi particolari.
Il primo risultato che si avvicina di più a quello che noi oggi chiamiamo teorema di Bezout fu effettivamente dovuto a Bezout verso l'anno 1765, ma è lontano dal tener conto delle obiezioni sollevate da Eulero.
Bezout si limita con l'aiuto di un nuovo metodo di eliminazione a provare che l'equazione che ci da le ascisse dei punti di intersezione è sempre di grado nm allorquando le due curve algebriche piane appartenenti allo stesso piano non hanno direzioni asintotiche comuni.
Alcuni punti di questa dimostrazione lasciano però a desiderare ma possono essere resi completamente rigorosi [6]. Il rigore è stato introdotto più tardi, per opera di Lagrange e di Gauss. Si può quindi concludere che la congettura avanzata da Mac-Laurin, studiata da Eulero e Bezout, è sfociata nel seguente teorema che possiamo chiamare teorema di Bezout-Eulero:

> *due curve algebriche, appartenenti allo stesso piano, di ordini rispettivi n ed m e privi di componenti comuni, hanno nm punti comuni, reali o immaginari, distinti o coincidenti, propri o impropri, purché ciascuno sia contato con la dovuta molteplicità. Se delle due curve,per esempio la g(x,y) è una retta (m=1), si ritrova lo stesso risultato già enunciato nel paragrafo 7 cioè che una curva algebrica f(x,y) di ordine n è incontrata da una retta che, non sia sua componente, in n punti.*

Per determinare i punti impropri di C^n occorrerà risolvere il sistema seguente

$$\begin{cases} f(x_0,x_1,x_2) = \varphi_n(x_1,x_2) + x_0\varphi_{n-1}(x_1,x_2) + . + x_0^{n-1}\varphi_1(x_1,x_2) + x_0^{n}\varphi_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad (7.3)$$

formato dall'equazione omogenea (6.3) della C^n e della retta impropria $x_0 = 0$. In tal modo si ottiene:

$$\varphi_n(x_1,x_2) = 0 \quad (7.4)$$

che è una equazione di grado n in $\frac{x_1}{x_2}\left(o\frac{x_2}{x_1}\right)$ che con le sue radici permette di determinare a meno di un coefficiente di proporzionalità le soluzioni x_1 e x_2 che con $x_0 = 0$ danno le coordinate dei punti impropri della C^n.
La (7.4) in coordinate non omogenee si scrive

$$\varphi_n(x,y) = 0 \quad (7.5)$$

la quale essendo un'equazione omogenea in x,y, rappresenta le n rette (reali o immaginarie, distinte o in parte o anche tutte coincidenti) che dall'origine proiettano i punti impropri della C^n [9].
Per cui per trovare i punti impropri di C^n possiamo determinare i punti impropri delle suddette n rette che, come risulta dalla (6.2), costituiscono il complesso dei termini di grado più alto.

9. Utilità del piano proiettivo complesso

Nel piano proiettivo complesso, più vasto di quello affine reale saranno possibili, attraverso l'uso di coordinate cartesiane omogenee, tutte le operazioni algebriche spingendo più a fondo il parallelismo tra geometria e algebra.
In tal modo la geometria godrà degli stessi vantaggi ottenuti dall'algebra rimuovendo eccezioni, fornendo maggiore uniformità di linguaggio e dando maggiore concisione nell'enunciazione di certe proprietà geometriche [8].
Gli esempi che seguono servono ad evidenziare quanto sia utile e vantaggioso il concetto di piano proiettivo complesso. A tale scopo consideriamo le seguenti curve algebriche piane di equazioni rispettive:

(a) $12xy - 5y^2 -12x + 4y = 0$
(b) $6x^2 -3xy + y^2 - 6x + 8y +10 = 0$
(c) $4x^2 +16xy +16y^2 - 2x-3y-1 = 0$
(d) $xy^2+y^3-x+2y+1=0$

Delle tre coniche reali C^2 (a),(b),(c) potremmo riconoscere il loro tipo portandole a forma canonica, ma ciò comporterebbe calcoli molto laboriosi.
Ponendoci invece nel piano proiettivo complesso e uguagliando a zero il complesso dei termini di 2° grado della conica (a) si ha:

$$y(12x-5y) = 0$$

Dalla retta y = 0 si ha il punto improprio (0;1;0) e dalla retta $y = \frac{12}{5}x$ l'altro punto improprio $\left(0;1;\frac{12}{5}\right)$, per cui si tratta una iperbole; della conica (b) uguagliando a zero l'insieme dei termini di 2°grado cioè $6x^2-3xy+y^2 = 0$ otteniamo i due punti impropri $\left(0;\frac{3 \pm i\sqrt{15}}{12};1\right)$, si tratta pertanto di una ellisse; della conica (c) uguagliando a zero il complesso dei termini di 2° grado otteniamo $(x+2y)^2 = 0$ e si ha un solo punto improprio (0;-2;1) contato due volte.
La conica è quindi una parabola.Per la ricerca dei punti impropri della cubica (d) ponendoci nel piano proiettivo complesso e uguagliando a zero il complesso dei termini di 3° grado si ha:

$$y^2(x+y) = 0$$

Considerando i punti impropri delle tre rette y = 0, y = 0, x+y = 0, si ottengono rispettivamente (0;1;0), (0;1;0) e (0;1;-1) e cioè il punto improprio (0,1,0) contato due volte e il punto improprio (0,1,-1). Consideriamo adesso i seguenti sistemi algebrici

$$\text{(e)} \quad \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x^2 - y^2 + 2x - 8 = 0 \end{cases} \qquad \text{(f)} \quad \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 4x^2 - 4xy + y^2 - x + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{(g)} \quad \begin{cases} x^3 + y^3 = a \\ x + y = b \end{cases} \qquad \text{(h)} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b' + c' = 0 \end{cases}$$

per i sistemi algebrici (e),(f),(g),(h) il comportamento nel piano affine reale è certamente diverso da quello che si verifica nel piano proiettivo complesso nel quale sussiste il teorema di Bezout-Eulero.

Il sistema algebrico di 2° grado (e) nel piano affine reale non ammette alcuna soluzione reale e finita, mentre nel piano proiettivo complesso ammette due soluzioni coincidenti all'infinito (0;1;1).
Il sistema algebrico (f) di 2° grado nel piano affine reale ammette una sola soluzione (6;13).
Nel piano proiettivo complesso usando coordinate cartesiane omogenee, ha una soluzione al finito (1;6;13) e una soluzione all'infinito (0;1;2).
Il sistema algebrico (g) di 3° grado nel piano affine reale ammette due soluzioni $z = \dfrac{b \pm \sqrt{\dfrac{4a-b^3}{3b}}}{2}$ reali e distinte se $\dfrac{4a-b^3}{3b} > 0$, reali e coincidenti se $\dfrac{4a-b^3}{3b} = 0$, complesse e coniugate se $\dfrac{4a-b^3}{3b} < 0$.
Nel piano proiettivo complesso alle due soluzioni precedenti $\left(1;\dfrac{b \pm \sqrt{\dfrac{4a-b^3}{3b}}}{2};1\right)$, va aggiunta la soluzione all'infinto (0;1;-1).
Il sistema (h) di 4° grado equivalente al sistema di 2° grado

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + bx + c = 0 \\ (a - a')x + (b - b')y + (c - c') = 0 \end{cases}$$

subisce un abbassamento di due gradi. Nel piano affine ha due soluzioni reali e distinte, reali e coincidenti o complesse e coniugate.

Nel piano proiettivo complesso invece ha due soluzioni al finito e due soluzioni all'infinito cioè i punti ciclici (0;1;±i), per cui possiamo concludere dicendo, a ragion veduta, che il concetto di piano proiettivo complesso è un validissimo strumento didattico.

Bibliografia

[1] AD. Aleksandrov, Ma Lavrent'ev - *Le matematiche 1974* - Paolo Boringhieri, Torino, cap.3 pag (220-221)

[2] AD. Aleksandrov, Ma Lavrent'ev - *Le matematiche 1974* - Paolo Boringhieri, Torino, cap. 3, pag (229)

[3] AD. Aleksandrov, Ma Lavrent'ev - *Le matematiche 1974* - Paolo Boringhieri, Torino, cap. 3, pag (255-262)

[4] Nicolas Bourbaki - *Elementi di storia della matematica* - Feltrinelli 1963, pag. 131

[5] Jan Deudonnè - *Cours de geometrie algebriques* - Presses universitaries de France 1974 - III DEuxieme époque - Exploration, pag. 22

[6] F. Di Venti e A. Mariatti da *Leonard Euler tra realtà e finzione*, Pitagora Editrice, Bologna 2000, pag 30

[7] Federico Enriques Oscar Chisini - *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche* - Ristampa anastatica 1985- Zanichelli Bologna, vol. 1, libro 3°, pag. 77

[8] Giuseppe Vaccaro - *Lezioni di geometria con elementi di algebra lineare. Edizione 1985* - Libreria Eredi Virgilio Veschi, cap. 8, pag. (204-205)

[9] Giuseppe Vaccaro - *Lezioni di geometria con elementi di algebra lineare. Edizione 1985* - Libreria Eredi Virgilio Veschi, cap. 8, pag. (266-267)

Matematica e sistemica

Eliano Pessa, Alberto Trotta[1]

Sunto: In questo lavoro ci si è proposti di affrontare il problema dei rapporti tra "matematica" e "sistemica" evidenziando soprattutto, il contributo che ciascuna delle due discipline può fornire all'altra.
Si evince, dunque, che le tematiche emergenti si presentano complesse solo da un punto di vista concettuale, perché si è evitato, per quanto possibile il ricorso a strumenti formali che implicano tecniche di alto livello. Lo scopo di questo articolo è stato anche quello di suscitare l'interesse per tematiche ancora poco conosciute.

Abstrat: Our principle in this research (project) is to analyse the reltionships between "mathematics" and "systematics" highlighting, above all, the possible benefits which can be exchanged between these two disciplines. One can deduce that the emerging issues are rather complex only from a conceptual viewpoint since we have avoided resorting to the employment of formal tool (methods) which imply the application of high standard techniques. The main aim of this paper is to arouse the reader's interest in themes that are still quite unknown.

Parole chiave: Sistemica, stabilità, biforcazione ,punto di equilibrio.

1. Cos'è la Sistemica ?

In questo lavoro il termine "Sistemica" denota un quadro di riferimento concettuale, includente anche un opportuno insieme di tecniche e di metodologie, che ha avuto origine dalla *Teoria Generale dei Sistemi*, proposta dal biologo austriaco Ludwig Von Bertalanffy fin dagli anni Quaranta dello scorso secolo (vedi in proposito Von

[1]*Centro Interdipartimentale di Scienze Cognitive, Università di Pavia, Piazza Botta 6, 27100 Pavia, Italy.*
Liceo Scientifico "Innocenzo XII" Via Ardeatina n 87, 00042 Anzio (Roma), Italy

Bertalanffy, 1968). Tale teoria era volta ad evidenziare caratteristiche di tipo generale comuni a tutti i sistemi, indipendentemente dalla scelta del particolare tipo di elementi e di relazioni tra gli stessi. Essa ebbe un notevole successo in vari ambiti, quali la fisica (dove ha dato origine alla *Sinergetica* di Haken e alla teoria delle *Strutture Dissipative* di Prigogine; vedi Haken, 1983; Prigogine e Glansdorff, 1971; Nicolis e Prigogine, 1977), l'economia (Boulding, 1956; 1985), l'ingegneria (Ashby, 1956; Forrester, 1968; Klir, 1991), la biologia (Varela, Maturana e Uribe, 1974) e le scienze sociali (Sutherland, 1973). Tale successo è dipeso dal fatto che l'obbiettivo fondamentale di questa nuova scienza (o, meglio, di questo approccio "transdisciplinare") era quello di indagare le condizioni che fanno sì che un sistema sia un sistema, ovvero un tutt'uno che non si riduce ad una semplice somma degli elementi costituenti. Siccome questo obbiettivo veniva a coincidere con una teoria dell'*emergenza* di proprietà globali a partire dall'interazione locale tra singoli elementi di un sistema, il successo della Teoria Generale dei Sistemi era automaticamente assicurato dal fatto che essa si occupava di un problema fondamentale comune a tutte le discipline scientifiche.

Col passare degli anni, tuttavia, i numerosi avanzamenti teorici e concettuali hanno messo in luce l'impossibilità di costruire una teoria unitaria dei sistemi e della loro emergenza nel senso proposto da Von Bertalanffy. Nel contempo questi avanzamenti hanno dato luogo, oltre a progressi scientifici nelle varie discipline, alla diffusione di un approccio nuovo ai problemi affrontati nei vari domini, ovvero un approccio volto a prendere in considerazione, più che i singoli elementi, ciò che rende un insieme di questi elementi un sistema. Molto spesso, infatti, i comportamenti dei singoli elementi sono regolati non tanto dalle interazioni locali con altri elementi, ma piuttosto dall'influenza esercitata dal contesto globale o dall'ambiente entro cui sono inseriti. Questo approccio offre nella ricerca scientifica, così come nella gestione di problemi complessi, dei vantaggi paragonabili a quelli offerti dalle tecniche e dalle metodologie privilegiate dalla Teoria Generale di Sistemi. Per questo si è affermato l'uso di denominare *Sistemica* l'approccio stesso, corredato ovviamente delle tecniche e metodologie di cui sopra, che possono

anch'esse essere qualificate con l'attributo di *sistemiche* (per una descrizione sintetica della Sistemica vedi Minati, 2004; una trattazione tecnica estesa è quella di Minati e Pessa, 2006).
Va ricordato, a questo proposito, che in specifici contesti disciplinari il termine "Sistemica" o quello di "Teoria dei Sistemi" sono stati utilizzati per indicare specifiche teorie, in particolare la Teoria dei Controlli Automatici (nel caso dell'ingegneria) e la Teoria dei Sistemi Dinamici (nel caso della Matematica). Naturalmente entrambe le teorie sono capitoli assai importanti della Sistemica, nel senso specificato in questo lavoro, e possono senza alcun dubbio essere contraddistinte dall'attributo "sistemiche". Tuttavia la Sistemica di cui si parla qui costituisce qualcosa di ben più ampio delle acquisizioni e delle metodologie relative alle teorie sopra citate.
In questo lavoro, destinato prevalentemente a matematici o fisici nonché a insegnanti di Matematica o di fisica, si affronterà il problema dei rapporti tra Matematica e Sistemica, da due punti di vista:
a) quanto la Matematica contribuisce allo sviluppo della Sistemica e fino a che punto questo contributo può essere utilizzato dagli insegnanti per indurre una mentalità di tipo sistemico?
b) può la Sistemica contribuire al progresso della Matematica e/o favorirne l'apprendimento?
Nel corso del lavoro affronteremo queste tematiche, assai complesse, esclusivamente da un punto di vista concettuale, evitando, per quanto possibile, il ricorso diretto a strumenti formali che implichino specifiche conoscenze tecniche matematiche di livello universitario. Lo scopo è esclusivamente quello di suscitare l'interesse dei lettori per tematiche che sono ancora poco conosciute.

2. La Matematica per la Sistemica

Si può dire che durante lo sviluppo della Sistemica non vi è stato capitolo della Matematica che non sia stato utilizzato, anche se alcune teorie matematiche sono state utilizzate in modo preferenziale rispetto ad altre. Ci riferiamo in particolare alla Teoria dei Sistemi Dinamici che, fondata da Poincaré e Ljapunov, ha conosciuto in tempi recenti uno sviluppo impetuoso ed ha acquistato grande popolarità anche presso il grande pubblico grazie alla scoperta dei processi caotici

deterministici e delle curve frattali che con essi hanno stretti collegamenti. Senza entrare in dettagli tecnici, per i quali rimandiamo ai numerosi manuali sull'argomento (qui ci limitiamo a citare i classici Guckenheimer e Holmes, 1983; Glendinning, 1994; Alligood, Sauer e Yorke, 1997), ci limitiamo a sottolineare che la Sistemica, proprio perché si interessa dei processi di emergenza e di cambiamento della struttura dei sistemi, prende in considerazione soprattutto sistemi evolutivi, ovvero che mutano col tempo e che coincidono, per l'appunto, con quelli studiati dalla Teoria dei Sistemi Dinamici. Quest'ultima ha dunque fornito alla Sistemica l'apparato concettuale di base, essenzialmente tramite l'introduzione di tre concetti fondamentali: quello di *punto di equilibrio* (poi generalizzato da quello di *attrattore*), quello di *stabilità* e quello di *biforcazione*.
Conviene qui spendere qualche parola in proposito. Il concetto di punto di equilibrio di un sistema dinamico (non importa qui la definizione tecnica) implica un atteggiamento mentale basato su due presupposti: 1) vengono presi in esame solo sistemi che si evolvono nel tempo, in funzione di opportune *leggi di evoluzione* (spesso espresse tramite equazioni differenziali, ma anche tramite equazioni alle differenze finite o leggi di ricorrenza); 2) di questi sistemi non interessano tanto i dettagli momentanei della loro evoluzione (comunque ricavabili tramite calcoli numerici al computer), quanto le caratteristiche del loro *stato finale* (ovvero dopo che l'evoluzione sarà terminata, magari dopo un tempo teoricamente infinito). Va notato che questo atteggiamento mentale è profondamente diverso da quello di molti matematici e soprattutto da quanto prescritto dai programmi scolastici di insegnamento della Matematica, incentrati su una visione *statica* di una Matematica descrittrice di *forme* immutabili ed eterne (in pieno accordo con una tradizione platonica). Al contrario la Teoria dei Sistemi Dinamici propone una Matematica per i fenomeni di un mondo mutevole, quelli della Fisica, della Biologia, dell'Economia, da cui riceve fonte di ispirazione e di cui permette una più profonda comprensione (e quindi previsione).
Il concetto di stabilità di un punto di equilibrio (o di un attrattore) rispetto a perturbazioni precisa quale sia la fondamentale caratteristica che, a partire dalla sola conoscenza di quest'ultimo, permette di

ricavare i possibili tipi di dinamica ammissibili per un dato sistema. Esso quindi (e la Teoria della Stabilità ad esso connessa) diventa l'aspetto da cui partire per caratterizzare globalmente le potenzialità di un sistema dinamico. Dal momento che la stabilità di un punto di equilibrio dipende a sua volta dai valori dei *parametri* che compaiono nelle leggi di evoluzione del sistema, ciò apre la strada allo studio di sistemi in cui, pur mantenendo invariata la forma delle leggi evolutive, il cambiamento dei valori dei parametri può portare ad una radicale trasformazione della struttura delle potenzialità dinamiche dei sistemi stessi. Questo conduce al concetto di *biforcazione* che, nella sua forma più semplice, consiste nel cambiamento delle proprietà di stabilità dei punti di equilibrio di un sistema dinamico non appena il valore di un parametro, variando in seguito a influenze esterne, attraversa un dato *valore critico*. Questa prospettiva permette di considerare i sistemi non solo come entità dinamiche, ma anche come entità *aperte*, ovvero sensibili alle influenze provenienti dall'ambiente esterno (che cambia i valori dei parametri). La moderna Teoria della Biforcazione (per cui rimandiamo alla bibliografia citata in precedenza) consente poi di tradurre questa prospettiva in un efficace strumento di analisi.
Va subito ricordato che la conoscenza di questi sviluppi non trova ancora una cittadinanza nella scuola. Alla Teoria dei Sistemi Dinamici e alla Teoria della Stabilità si accenna solo in alcuni corsi universitari di Matematica, Fisica o Ingegneria. Quanto alla Teoria della Biforcazione, resta ancora appannaggio di pochi specialisti. Eppure il concetto di biforcazione viene utilizzato, senza saperlo, da un buon numero di studenti quando si occupano delle soluzioni di equazioni algebriche di grado superiore al primo. Ecco un banale esempio, costituito dalla semplice equazione:

$$a\,x^3 - b\,x = 0 \qquad (1)$$

Che accade se b è positivo? Che l'equazione ammette tre soluzioni reali e distinte, ovvero $x = 0$, $x = \sqrt{b}$, $x = -\sqrt{b}$. D'altra parte è immediato vedere che, quando b è negativo, tutte e tre le soluzioni della (1) hanno parte reale nulla. Il valore $b = 0$ appare dunque come un *valore critico*, che separa due regioni in cui le potenzialità della

(1), quanto a parti reali delle soluzioni, sono profondamente diverse. Questo valore, dunque, si comporta per certi aspetti come se fosse un punto di biforcazione. E infatti, se riportiamo su un grafico le parti reali delle soluzioni della (1) in funzione del valore di b, otteniamo un andamento che ricorda moltissimo quello che caratterizza un particolare tipo di biforcazione, la cosiddetta *pitchfork bifurcation* (vedi Figura 1).

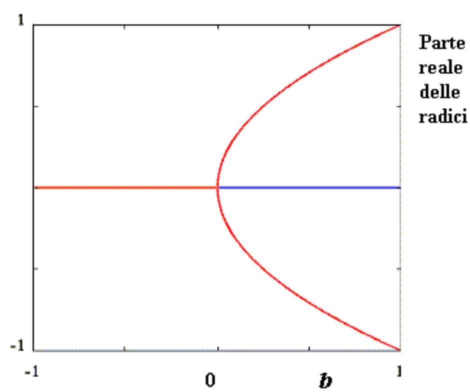


Figura 1
Andamento della parte reale delle radici di (1) in funzione di b.

Tuttavia è evidente che questo caso, anche se permette di comprendere intuitivamente il concetto di biforcazione, non rappresenta una vera biforcazione. Per averne una occorrerebbe scrivere un sistema dinamico descritto da un'equazione differenziale in qualche modo collegata alla (1), come ad esempio:

$$dx/dt = - (a\, x^3 - b\, x) \qquad (2)$$

Tuttavia anche questa semplice equazione è al di fuori della portata dello studente medio. L'ostacolo si può comunque superare discretizzando la (2) e trasformandola in una semplice equazione alle differenze finite, ovvero in una relazione di ricorrenza che ha la semplice forma:

$$x_{t+1} = x_t - h\,(a\,x_t^3 - b\,x_t) \qquad (3)$$

dove h è un opportuno passo di discretizzazione. La (3) rappresenta una relazione facilmente simulabile su computer ed è molto semplice verificare che il valore $b = 0$ è un vero punto di biforcazione che separa due diversi tipi di potenzialità dinamica: quella (corrispondente a valori positivi di b) in cui il punto di equilibrio $x = 0$ è instabile, mentre $x = \sqrt{b}$ e $x = -\sqrt{b}$ sono entrambi punti di equilibrio stabili, e quella (corrispondente a valori negativi di b) in cui l'unico punto di equilibrio $x = 0$ è stabile. A puro titolo di esempio mostriamo nella Figura 2 l'evoluzione di una perturbazione dello stato iniziale, scelto pari a $x = 0$, in corrispondenza ad un valore positivo di b (più precisamente abbiamo scelto $b = 2$, mentre $a = 1$, $h = 0.1$ e l'ampiezza iniziale della perturbazione, applicata in corrispondenza al trentesimo passo di evoluzione, era pari a 0.5). Come si può agevolmente vedere, la perturbazione cresce rapidamente, avvicinandosi inesorabilmente a una delle due soluzioni stabili, data da $x = \sqrt{2}$. Nella Figura 3 invece mostriamo l'evoluzione della stessa perturbazione, in corrispondenza agli stessi parametri usati nella simulazione di Figura 2 ma con $b = -2$. Stavolta, come atteso, la perturbazione decade rapidamente, dato che $x = 0$ è l'unica soluzione stabile.

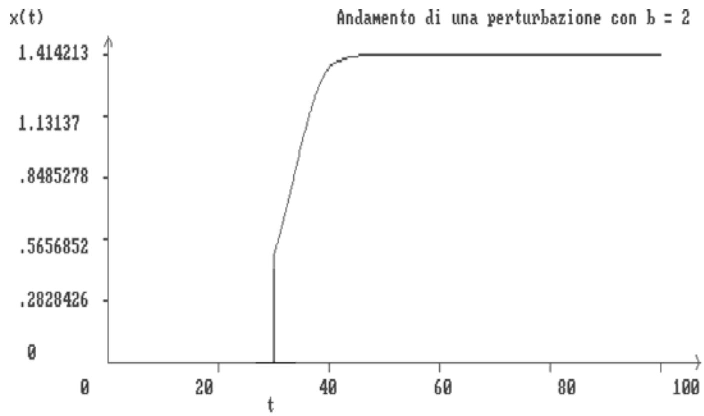


Figura 2
Andamento di una perturbazione dello stato iniziale nullo quando *b* = 2.

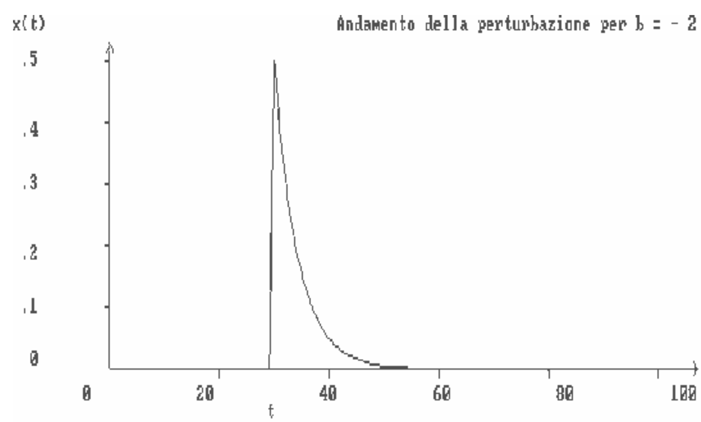


Figura 3
Andamento di una perturbazione dello stato iniziale nullo quando *b* = - 2.

Ovviamente queste simulazioni, benché offrano spunti di riflessione senza costringere a un diluvio di formule matematiche, non dicono nulla su come la Sistemica utilizzi la Teoria dei Sistemi Dinamici per descrivere i processi di emergenza. A questo proposito va ricordato che, qualunque sia la definizione adottata di emergenza (vedi, ad

esempio, Crutchfield, 1994; Goldstein, 1999), tutti concordano nell'attribuire a questi processi tre caratteristiche fondamentali: a) la dipendenza dall'osservatore (vengono considerati come emergenti solo in relazione alle conoscenze e alle teorie possedute dall'osservatore stesso), b) l'esistenza di differenti *livelli* di descrizione (ad esempio microscopico e macroscopico), che permettono l'emergenza di un livello da un livello sottostante (il cristallo emerge dai singoli atomi, un ferromagnete emerge dalle interazioni locali tra i singoli spin microscopici, la mente emerge dai neuroni del cervello, ecc.), c) la comparsa di strutture *coerenti* su larga scala (laser, superconduttori, esseri viventi, società, ecc.).
Solo teorie matematiche sufficientemente sofisticate consentono di generare sistemi in cui sono presenti tutte e tre queste caratteristiche. Le Strutture Dissipative e i modelli della Sinergetica citati nel primo paragrafo cercano per l'appunto di soddisfare queste condizioni, ma si tratta di ambiti accessibili solo a ricercatori altamente specializzati in questi domini e dotati di un vastissimo insieme di conoscenze in ambito matematico e fisico. Tuttavia, come al solito, esiste una scappatoia che consente anche a semplici studenti di generare emergenza a buon mercato: servirsi di simulazioni su computer. Finora le più popolari sono state costituite da quelle che si rifanno ai modelli della cosiddetta *Vita Artificiale* (vedi, per manuali di riferimento, Emmeche, 1996; Johnson, 2002; Mikhailov e Calenbuhr, 2002; semplici introduzioni sono quelle di Silvi Antonini, 1995; Pessa, 2004). Esse hanno tuttavia lo svantaggio di ricorrere a leggi evolutive non facilmente traducibili in termini di equazioni differenziali o di relazioni di ricorrenza come la (3). Per questa ragione qui useremo un altro tipo di sistemi, i cosiddetti *Coupled Map Lattices* (CML), che consistono in reticoli discreti (quindi rappresentanti una struttura spaziale ben definita) in ogni sito dei quali è collocato un sistema microscopico, la cui uscita, ad ogni istante t, viene determinata da una legge di ricorrenza (modernamente chiamata una *mappa*) come quella esemplificata dalla (3). Vi è inoltre una relazione di interazione tra siti vicini che fa sì che l'output di ogni sistema dipenda anche da quelle dei siti vicini.

Ogni CML (per una introduzione vedi Kaneko, 1993; Bunimovich, 1995) costituisce una versione discretizzata di una opportuna equazione o di un opportuno sistema di equazioni alle derivate parziali. Qui, senza insistere sulla relazione tra CML e equazioni alle derivate parziali (sulle quali sono basati molti modelli di emergenza), ci limiteremo a mostrare come essi si prestino ad evidenziare, tramite simulazioni su computer, l'emergenza di comportamenti collettivi (che possiamo definire macroscopici) a partire dalle interazioni locali tra i singoli sistemi, ovvero tra le singole mappe. Le simulazioni stesse consentono di studiare sperimentalmente come questi effetti dipendano dal grado di accoppiamento locale tra mappe di siti vicini e dai valori dei parametri di ogni singola mappa. Qui, tanto per fornire un esempio concreto, ci serviremo di un reticolo di siti monodimensionale con topologia toroidale (l'ultimo sito ha come vicino il primo, in modo che l'intero reticolo è topologicamente equivalente ad un anello chiuso), in cui la legge di evoluzione del generico sito i-esimo è data da:

$$x_i(t+1) = (1 - \varepsilon)\, F[x_i(t)] + (\varepsilon / S) \sum_j F[x_j(t)] \qquad (4)$$

In questa formula il parametro ε denota la cosiddetta *costante di accoppiamento* che caratterizza la forza dell'interazione locale tra siti vicini. Il numero dei siti vicini di ogni dato sito è indicato con S, mentre l'indice j che compare nella sommatoria a secondo membro assume solo valori relativi alle coordinate dei siti vicini a quello i-esimo. La mappa locale $F(x)$ è stata scelta della forma:

$$F(x) = a\, x^3 - b\, x \qquad (5)$$

quindi ancora legata alla (1). Negli esempi di simulazioni fatte si è studiato come la comparsa di fenomeni di coerenza collettiva dipenda dal valore del parametro b, preso in considerazione anche negli esempi precedenti. In tutte le simulazioni si è usato un CML composto da 100 siti, con un vicinato di ogni sito di ampiezza 3, includente anche il sito stesso preso in considerazione (quindi il sito i-esimo aveva come vicini i 7 siti di etichette $i - 3$, $i - 2$, $i - 1$, i , $i + 1$, $i + 2$, i

+ 3). I valori degli altri parametri erano $a = 1$, $\varepsilon = 0.4$. Nella Figura 4 a) viene riportato l'andamento temporale, per 100 passi, della media delle attivazioni dei singoli siti in corrispondenza alla scelta $b = 2$. Invece nelle Figure 4 b) e 4 c), rispettivamente, sono riportate le distribuzioni delle attivazioni dei singoli siti in corrispondenza a $t = 0$ e a $t = 100$, sempre per $b = 2$.

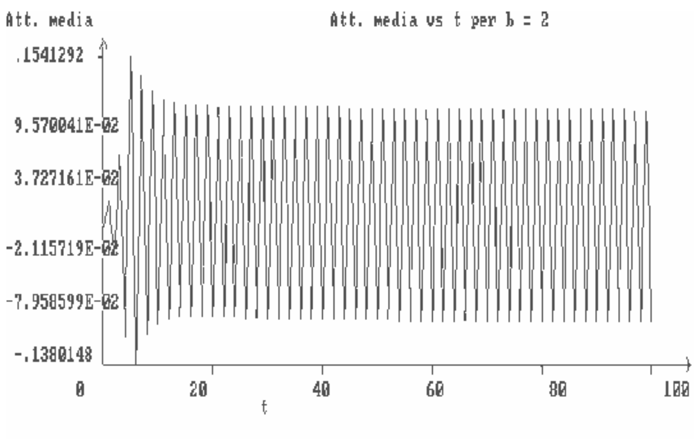


Figura 4 a)

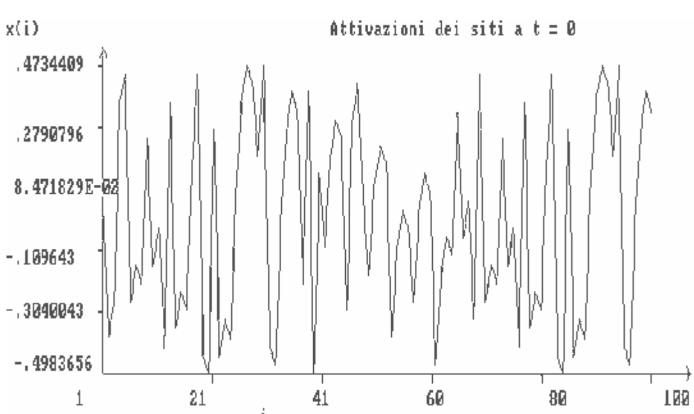


Figura 4 b)

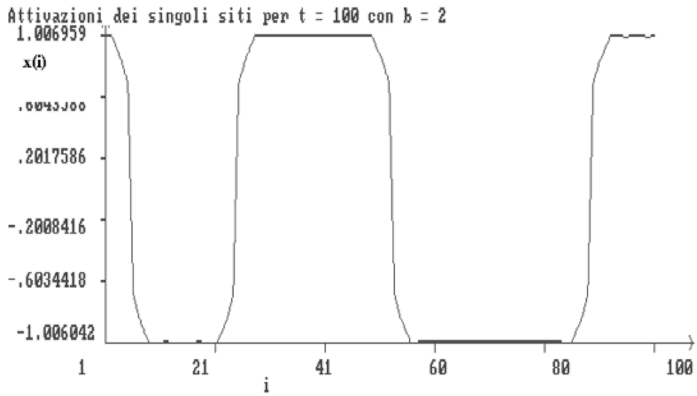


Figura 4 c)

Come si può vedere, un valore positivo di *b* dà luogo ad una dinamica media variabile con abbastanza regolarità (anche se non perfettamente periodica, come sembrerebbe a prima vista). Inoltre, mentre la distribuzione iniziale delle attivazioni appare completamente disordinata, come mostra la Figura 4 b), la dinamica finisce per produrre una situazione altamente ordinata dopo 100 passi, caratterizzata da zone di coerenza su larga scala separate da altre zone di coerenza con attivazioni esattamente di segno opposto. Una distribuzione altamente ordinata che emerge dal fatto che la dinamica microscopica delle singole mappe è regolata dal valore del parametro $b = 2$.

Tuttavia questa situazione scompare del tutto quando, mantenendo invariati tutti gli altri parametri, si passa ad un valore $b = - 2$. Qui l'andamento quasi regolare dell'attivazione media viene sostituito, come mostra la Figura 5, da un crollo che conduce ad un valore costante: il sistema non si evolve più.

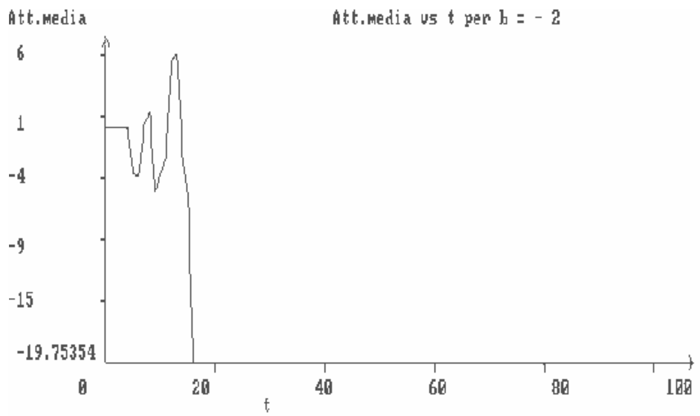


Figura 5

Anche la distribuzione delle attivazioni tra i vari siti, pur se disordinata all'inizio, si trasforma dopo 100 passi in una distribuzione piatta, in cui tutti i siti hanno la stessa attivazione, corrispondente ad un valore negativo di modulo assai grande. Ecco come, cambiando il valore del parametro *b*, si può far apparire o scomparire l'emergenza.
Senza proseguire ora lo studio di singoli casi particolari, come quello fin qui presentato, vale la pena di notare come questi metodi consentano anche a coloro che sono meno dotati di conoscenze matematiche (purché abbiano un computer) di indagare in modo fruttuoso le relazioni tra emergenza macroscopica e caratteristiche dei comportamenti microscopici. Va da sé che questo studio non può che portare fatalmente ad indagare su altre questioni prettamente matematiche collegate alla natura delle funzioni utilizzate per costruire le mappe stesse. Solo che questa indagine risulta sostenuta da un interesse ben maggiore di quello suscitato da esercitazioni scolastiche non finalizzate a scopi ben precisi. Ora, dopo aver illustrato come la Matematica fornisca gli strumenti fondamentali per costruire la Sistemica e come alcuni di questi strumenti possano essere compresi e utilizzati ricorrendo all'uso del computer, è il momento di chiedersi se, a sua volta, la Sistemica possa contribuire allo sviluppo della Matematica.

3. La Sistemica per la Matematica

Un atteggiamento sistemico è quello attento alle relazioni tra elementi magari apparentemente non correlati tra loro, tra le parti e il tutto, tra interno ed esterno, nello sforzo di cogliere i processi di emergenza che permettono la comparsa di entità globali, a loro volta vincolanti le stesse dinamiche locali che le hanno generate. Questo sforzo è rivolto ad individuare parametri e fattori influenzanti anziché ad isolare i singoli elementi, a decomporre i sistemi, ad individuare singoli meccanismi di funzionamento. Dato che la Matematica è una disciplina assai complessa, in cui ogni argomento può, a priori, essere connesso con qualunque altro argomento, l'utilità di un atteggiamento del genere per lo sviluppo della Matematica appare ovvia. D'altra parte esso è proprio dei migliori ricercatori nel campo della Matematica, che sono individui creativi e dotati di notevole fantasia. La domanda fondamentale è dunque: come mai esso è invece carente in molti docenti di Matematica, al punto che la quasi totalità degli studenti identifica la Matematica come una disciplina in cui è assolutamente bandita la creatività e in cui occorre solo stare attenti a singoli aspetti particolari?
Rispondere a questa domanda è assai difficile, dato che occorre tener conto di vari fattori, quali la politica di reclutamento dei docenti, la situazione socio-economica in cui hanno operato ed operano i matematici e i docenti di Matematica, la politica scolastica e culturale dei governi e, non ultimo, l'influenza esercitata dalle predominanti concezioni della Matematica. A questo riguardo va osservato che, fino a tempi recenti, ha predominato una concezione di stampo platonico, ben esemplificata dalla corrente formalista, secondo cui la Matematica si occupa di entità astratte che esistono di vita propria, mantenendo un aspetto immutabile, in una sorta di iperuranio accessibile solo alla nostra mente. Gli individui, dunque, non fanno altro che esplorare questo iperuranio *scoprendo*, se ne sono capaci o se sono fortunati, i concetti matematici che ivi abitano, indipendentemente da noi, fin dalla notte dei tempi. Non vi è quindi posto per evoluzioni o emergenze di alcun tipo e la contemplazione di queste forme assolute

è riservata solo ai pochi eletti in grado di sacrificarsi per anni con duri allenamenti mentali: non vi è una "via regia per la geometria", come si racconta abbia detto Euclide. Tale concezione elitaria ha naturalmente anche pesanti implicazioni di stampo corporativo: i matematici sono svincolati dal mondo sensibile e hanno diritto di esserlo. Sono dunque degli esseri speciali da trattare in modo diverso dagli altri, che andrebbero svincolati da ogni preoccupazione per il mondo materiale e che avrebbero il diritto di starsene a lavorare per conto proprio senza interferenze da parte di altri, che non sono in grado di giungere al loro livello. Di fatto in alcuni paesi, come l'Italia, questa concezione ha generato dei matematici lontani da ogni preoccupazione di tipo applicativo riguardo al proprio lavoro, indifferenti nei confronti dei problemi politici e sociali e talvolta anche accondiscendenti nei confronti dei vari regimi politici. All'interno della classe dei matematici ha dato poi luogo ad una rigida gerarchizzazione, con pochi eletti in grado di "vedere" le più alte verità matematiche e molti umili adepti a cui era assegnato il compito di occuparsi dei particolari a livello più basso. Altro che visione sistemica!
Naturalmente la Matematica serve e, dato che di questo aspetto i matematici non si occupavano, pian piano fisici, ingegneri, chimici, biologi, economisti e via dicendo hanno cominciato a costruirsi da soli gli strumenti matematici che servivano per il loro lavoro. Questo ha portato inevitabilmente ad una crescita delle competenze strettamente matematiche presso queste categorie di studiosi e ad una progressiva rinuncia all'aiuto da parte di matematici professionisti, che apparivano sempre più inutili e chiusi nel loro mondo. Tale situazione di crisi ha assunto oggi dimensioni rilevanti, aggravata anche dal crollo delle iscrizioni al corso di laurea in Matematica, dalla forte diminuzione dei finanziamenti per la ricerca e dalla crescente difficoltà nel trovare impiego nelle scuole come insegnante di Matematica.
Può la Sistemica essere d'aiuto? Indubbiamente una ripresa dell'interesse per la Matematica non può che venire dall'operato degli insegnanti, i quali, proprio perché a contatto quotidianamente con problemi reali suscitati da un mondo rapidamente mutevole, non possono limitarsi ad essere solo dei matematici, ma devono anche possedere competenze non banali di carattere psicologico. In questo

contesto una educazione alla Sistemica può essere notevolmente utile al fine di stimolare negli alunni creatività, fantasia, capacità di vedere i problemi da più punti di vista, di generalizzare, di collegare tra loro aspetti e concetti differenti. Per il momento questa forma di educazione non costituisce una tecnologia, ma le osservazioni compiute sull'apprendimento della Matematica nelle scuole mostrano inequivocabilmente che, quando un insegnante si è posto questi obbiettivi e ha lavorato per conseguirli, non solo le performance degli alunni migliorano in tutti i settori, ma aumentano anche nel campo strettamente matematico, persino in quegli alunni che hanno sempre avuto difficoltà di apprendimento della Matematica e addirittura in quelli afflitti da lievi ritardi mentali (su queste tematiche vedi Antonietti, 1994; Lucangeli e Passolunghi, 1995).

4. Conclusioni

Da quanto sopra detto si evince, innanzitutto, che la Matematica costituisce uno strumento fondamentale per procedere nella costruzione della Sistemica. Inoltre quest'ultima pone continuamente nuove sfide al sapere matematico che, quando le affronta con successo, progredisce in modo consistente. D'altra parte una educazione alla Sistemica appare assai utile per sviluppare una didattica della Matematica, a tutti i livelli, che consenta di uscire dalla grave crisi in cui si trova l'insegnamento di questa disciplina, crisi che contribuisce a minacciare gravemente la futura diffusione della cultura scientifica nel nostro e in altri paesi, con pericolose ricadute a lungo termine sul piano politico e sociale. Queste considerazioni sembrano sufficienti a stimolare l'interesse dei matematici, universitari e docenti nella scuola, nei confronti della Sistemica. Appare auspicabile che questo interesse spinga in futuro alcuni matematici a contribuire fattivamente a nuovi progressi della Sistemica.

Bibliografia citata

Alligood, K., Sauer, T., Yorke, J.A. (1997). *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer, New York.

Antonietti, A. (1994). *Il pensiero efficace. Metodi e tecniche per la soluzione creativa di problemi*. Franco Angeli, Milano.

Ashby, R. (1956). *An Introduction to Cybernetics*. Wiley, New York.

Boulding, K. (1956). General Systems Theory: The skeleton of science. *Management Science*, **2**: 197-208.

Boulding, K. (1985). *The World as a Total System*. Sage, Thousand Oaks, CA.

Bunimovich, L.A. (1995). Coupled Map Lattices: One Step Forward and Two Steps Back. *Physica D*, **86**: 248-255.

Crutchfield, J.P. (1994). The Calculi of Emergence: Computation, Dynamics and Induction. *Physica D*, **75**: 11-54.

Emmeche, C. (1996). *Il giardino nella macchina. La nuova scienza della Vita Artificiale*. Bollati Boringhieri, Torino.

Forrester, J.W. (1968). *Principles of Systems*. Wright-Allen Press, Cambridge, MA.

Glendinning, P. (1994). *Stability, Instability and Chaos: An Introduction to the Theory of Nonlinear Differential Equations*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Goldstein, J. (1999). Emergence as a Construct: History and Issues. *Emergence*, **1**: 49-72.

Guckenheimer, J., Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields*. Springer, Berlin.

Haken, H. (1983). *Synergetics, an Introduction: Nonequilibrium Phase Transitions and Self-Organization in Physics, Chemistry, and Biology*. Springer, Berlin.

Johnson, S. (2002). *Emergence: The connected lives of Ants, Brains, Cities and Software*. Touchstone, New York.

Kaneko, K. (Ed.) (1993). *Theory and Applications of Coupled Map Lattices*. Wiley, Chichester, UK.

Klir, G.J. (Ed.) (1991). *Facets of Systems Science*. Kluwer, New York.

Lucangeli, D., Passolunghi, M.C. (1995). *Psicologia dell'apprendimento matematico*. Utet, Torino.

Mikhailov, A.S., Calenbuhr, V. (2002). *From Cells to Societies. Models of Complex Coherent Action*. Springer, Berlin.

Minati, G. (2004). *Teoria Generale dei Sistemi, Sistemica, Emergenza: un'Introduzione*. Polimetrica, Milano, Italy.

Minati, G., Pessa, E. (2006). *Collective Beings*. Springer, Berlin.

Nicolis, G., Prigogine, I. (1977). *Self-Organization in Nonequilibrium Systems: From Dissipative Structures to Order through Fluctuations*. Wiley, New York.

Pessa, E. (2004). La Matematica per la Vita Artificiale. In G,Bruno, A.Trotta (a.c.), *Atti del Congresso Nazionale Mathesis, Anzio-Nettuno 18-21 Novembre 2004* (pp. 455-467). Mathesis, Anzio.

Prigogine, I., Glansdorff, P. (1971). *Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations*. Wiley, New York.

Silvi Antonini, P. (1995). *Vita Artificiale. Dal Golem agli automi cellulari*. Apogeo, Milano.

Sutherland, J. (1973). *A General Systems Philosophy for the Social and Behavioral Sciences*. Braziller, New York.

Varela, F., Maturana, H.R., Uribe, R. (1974). Autopoiesis: The Organization of Living Systems, its Characterization and a Model. *BioSystems*, **5**: 187-196.

Von Bertalanffy, L. (1968). *General System Theory*. Braziller, New York.

Indagine sui deludenti risultati in matematica degli allievi delle scuole italiane

*Antonio Salmeri**

Sunto
Si riportano qui di seguito le risposte ai quesiti dell'indagine promossa dalla Sezione di Roma della Mathesis riservata ai Soci di tutta Italia al fine di individuare le cause dei deludenti risultati dei ragazzi italiani nella matematica.

Abstract
In the following, you find the answers to the questions in the survey promoted by the Section of Rome of Mathesis reserved for members around the Italy in order to identify the causes of the disappointing results of Italian students in matematics.

Introduzione
Ormai da tempo si parla dei deludenti risultati degli studenti italiani soprattutto in matematica. Sono stati tenuti convegni, seminari e conferenze per cercare di capire le motivazioni di questo allarmante fenomeno. Si dà la colpa ai docenti non convenientemente impegnati o scarsamente motivati, alle molteplici attività extrascolastiche che possono distrarre, a libri di testo poco ben congegnati, a programmi troppo lontani dalle attuali esigenze. Ma chi meglio dei soci della Mathesis, docenti di matematica e fisica di ogni ordine di studi ed attenti ai problemi della didattica, può provare ad individuare le cause di questo presunto degrado? A tale scopo abbiamo avviato un'indagine per avere un utile e competente parere. Sono state scelte alcune domande, talvolta un po' provocatorie, da sottoporre ai soci, ma anche a professionisti e genitori. Delle risposte ricevute, ne abbiamo selezionato alcune fra le più significative, che riportiamo qui di seguito in corrispondenza della relativa domanda. Un più ampio campione è stato pubblicato nel sito www.mathesisnazionale.it .

* Socio Mathesis – Sezione Romana - a.salmeri@mclink.it

1) Gli allievi italiani sono distratti da troppi impegni extra-scolastici?

<Sono anche le famiglie a non credere più tanto nella scuola e a comunicare ai figli questo sentire.

<Ma non si tratta solo di distrazione.

<Non sono distratti da impegni extrascolastici, ma sono attratti da valori effimeri che offre la televisione nel primo pomeriggio o da un utilizzo eccessivo di computer per cose culturalmente nulle.

<E anche parascolastici, in orario curricolare.

<Più che di impegno extrascolastico si tratta di disimpegno scolastico.

<Gli alunni sono distratti dagli impegni extrascolastici quando non sono motivati allo studio e non sono guidati dalle famiglie e dagli insegnanti; altrimenti, gli impegni extrascolastici influenzerebbero positivamente la formazione del ragazzo, responsabilizzandolo.

<Calcetto, computer, discoteca, TV.

<Forse questo è vero per gli allievi più piccoli, mentre i più grandi, mi sembra che abbiano sempre meno interessi

<Sicuramente gli impegni extrascolastici sono troppi, i ragazzi spesso hanno difficoltà a stabilire quali sono gli impegni prioritari rispetto agli altri. Credo che una parte della colpa sia delle famiglie.

<Non credo, essendo sicuramente più in grado dei meno giovani di gestire flussi continui e massicci di dati, non necessariamente facendone un mare magnum, ma anche elaborando

<Sono poco responsabilizzati ad accrescere la propria formazione.

<Credo che la scuola non offra un ambiente sereno o comunque non sia in grado di fronteggiare gli scarsi ideali della società e i disagi in cui gli alunni vivono fuori e dentro la scuola. Le attività extrascolastiche completano la formazione dei giovani.

<Occorre che i genitori vigilino sui propri figli rendendosi conto del tempo che i figli dedicano allo studio.

<Sono semplicemente poco organizzati nel loro lavoro.

<Il numero di impegni di un giovane non ha limiti precisi, ciò che fa la differenza è l'interesse verso le discipline di studio

<Anche per inadeguatezza della scuola, nel campo sportivo in particolare: mancanza di proposte, di attrezzature e di organizzazione del tempo libero.

<Secondo me sono spesso disorientati e non riescono a concentrare le loro energie sullo studio. Mi chiedo: i moderni mezzi multimediali aiutano la riflessione o favoriscono la distrazione? C'è bisogno di una valida guida, dei valori condivisi da tutti per indurre gli alunni a fare le giuste scelte tra gli innumerevoli stimoli a cui oggi essi sono soggetti.

<Ai nostri tempi (anni 50) lo studio occupava sostanzialmente quasi tutta la giornata. Eravamo forse meno intelligenti?
<Abbastanza. Spesso citano tutti i loro impegni dell'arco della giornata e a tale proposito si lamentano dei compiti assegnati e ne richiedono minore quantità per poter svolgere la complessa giornata scolastica ed extra-scolastica.
<È evidente. E anche dalla mancanza di rigore in tutti i campi.
<Nella scuola media dove io insegno, a mio parere le attività pomeridiane e di mattina, sono troppe (pur essendo tutte interessanti, almeno potenzialmente).
<Talvolta, ma ci sono ragazzi che portano avanti impegni extrascolastici quali sport o musica e si impegnano a scuola. Alcuni ragazzi, invece, non impegnati occupano comunque il loro tempo extrascolastico senza impegno.
<Attività sportive, musica , canto, danza, attività progettuale dell'istituto non permettono uno studio riflessivo ed analitico.
<E' la televisione che rovina gli studenti, ma non è un "impegno extrascolastico", è la spazzatura in cui sono immersi.
<E' giusto avere impegni extrascolastici, ma questi devono essere tali da lasciare sufficiente tempo per lo studio e soprattutto per l'approfondimento di alcune materie.
<Alle volte sì. C'è la corsa a non lasciare un attimo di tempo libero, che invece ci vuole. Ma questo forse deriva dal fatto di non riuscire a far amare abbastanza gli impegni scolastici, ai quali gli studenti potrebbero dedicare più tempo per loro decisione e non perché costretti dal docente.
<La necessità di realizzarsi all'interno dei gruppi sociali spinge gli allievi a ricercare i canoni formativi della propria personalità all'esterno della scuola.
<Soprattutto dai "progetti" interni ai singoli Istituti.
<Non è bene che i ragazzi pensino solo alla scuola. Devono saper gestire doveri scolastici e tempo libero.

2) E' vero che gli allievi italiani sono meno bravi dei coetanei di altri Paesi?
<Bisogna intendere cosa si vuol dire "con meno bravi", certamente sono meno addestrati ai quesiti che vengono proposti nelle gare matematiche.
<Sento dire spesso, anche a livello ufficiale, che i nostri allievi sono meno bravi; può darsi, ma dalle mie esperienze non risulta. In particolare, nei corsi universitari (per ciò che mi riguarda, Ingegneria ed Economia) abbiamo studenti di vari Paesi che, in generale, hanno maggiori carenze, anche se conoscono bene la lingua.

<In ambito scolastico (nel mio caso in un istituto per geometri) gli studenti stranieri hanno qualche difficoltà in più. Penso, però, che il monitoraggio vada fatto sugli studenti universitari, da cui si può capire la preparazione che hanno avuto nel corso degli studi medi.
<Statisticamente penso di no; però sono meno abituati a lavorare, in tutti i sensi e in tutti i campi.
<Forse perché la maggior parte dei ragazzi italiani è poco responsabile, non ha più valori morali e pensa solo a cose futili
<Per esperienza personale con amici di Parigi i loro programmi sono più avanzati.
<Dalla mia esperienza ho potuto constatare che gli italiani sono meno bravi nelle materie scientifiche e nelle lingue straniere, mentre hanno una buona preparazione nelle materie umanistiche.
<No, la responsabilità è tutta nel modo di porla la matematica.
<Credo che la scuola non sia abbastanza ricca di buon materiale didattico.
<Perché il campione scelto potrebbe non contenere studenti che conseguono una formazione al di fuori degli schemi tradizionali scola-stici.
<Dai test effettuati viene la conferma che i nostri allievi non studiano.
<Non in senso assoluto, anzi, da sempre gli allievi italiani sono considerati i migliori in ambito internazionale. Le riforme degli ultimi anni hanno contribuito negativamente all'abbassamento del livello culturale generale.
<Pur nel collasso del sistema scolastico ed universitario, esiste ancora in Italia almeno nella scuola primaria e secondaria, il concetto della preparazione generale di base, propedeutica ad ogni tipo di sviluppo successivo.
<Stando alle statistiche che vengono proposte dalla televisione. Ma ho i miei dubbi, occorrerebbe confrontare il livello di difficoltà delle tracce date negli altri Paesi negli esami di stato.
<Secondo me dipende da un approccio culturale ed emotivo nei confronti della matematica che li autoinibisce e li autorizza ad autoinibirsi e in alcuni casi al disimpegno e alla auto disistima scientifica che interrompe in alcuni casi il percorso di conoscenza e di avanzamento matematico. Un pregiudizio generazionale e culturale che continua a trasmettersi negli anni.
<Questo risulta, purtroppo, dai rapporti OCSE del *Programme for international student assessment*. Siamo lontanissimi dai migliori (finlandesi, olandesi, sloveni, tedeschi, inglesi ecc.). In matematica siamo al 36° posto!
<L'affidabilità del sistema d'istruzione italiano è andata diminuendo ed il principio meritocratico, a scuola abbastanza diffuso, non trova riscontro nell'inserimento nel mondo del lavoro.

<Non credo si possa affermare ciò: i nostri giovani hanno molte potenzialità e talenti. I risultati scolastici fanno affermare ciò ma non è forse la "scuola italiana ad offrire meno" rispetto a quelle degli altri Paesi?
<Da molti anni si è promossi anche se non si è sufficientemente preparati. Ciò crea l'errata certezza che basta studiare poco per andare avanti.
<No. Ma forse c'è la tendenza a pensare che si riesca nella vita anche facendo poco o nulla. Massimo risultato con il minimo sforzo. Quelli più preparati sono coloro che per loro predisposizione studiano al di là dei loro doveri di studenti.
<Nella mia limitata esperienza di insegnate (effettuato esami alla facoltà di architettura di Roma "Sapienza" e tenuto un corso introduttivo all'informatica sempre alla "Sapienza") ho riscontrato, talvolta, carenze sia nei concetti di base che nella visione spaziale della geometria, in allievi che avevano il diploma di scuola superiore.
<Sono solo meno riflessivi e motivati.
<Spesso i test non sono ben posti; indagano sulle conoscenze e non sulle capacità.
<Possono studiare di meno, grazie allo "sconto " dei debiti.

3) Gli insegnanti hanno una preparazione inadeguata all'insegnamento? *(Con questa domanda non si vuole mettere in dubbio la preparazione degli Insegnanti ricevuta durante il corso di laurea. Ci si domanda se i rigorosi studi compiuti all'università sono adeguati ad un insegnamento della matematica nelle scuole primarie e secondarie, o forse non dovrebbero essere approfonditi maggiormente gli argomenti di matematica elementare).*
<No, se parliamo della preparazione personale, a volte si, se pensiamo all'efficacia dell'insegnamento.
<Sì, per quanto riguarda le metodologie didattiche rapportate alle varie età e soprattutto non hanno alcuna preparazione psico-pedagogica.
<Penso di no, ma spesso per seguire qualche rara attività di aggiornamento occorre fare dei grossi sacrifici personali. Si dovrebbe avere maggior possibilità di aggiornamento, in particolare sulla metodologia.
<Le cause sono tante, ma la principale va ricercata nella riforma degli esami di Stato del 1970 che permetteva di conseguire la maturità scientifica sostenendo solo la prova scritta di matematica: per anni, i docenti non si sono posto il problema di approfondire i teoremi e le tematiche dell'ultimo anno di corso (non dovendosi confrontare con un commissario esterno) fissando la loro attenzione alla soluzione del problema (ridotto al grafico

della funzione). Parallelamente, negli istituti tecnici il corso di matematica terminava al quarto anno.
<I vecchi corsi tradizionali oltre a fornire pochi spunti riguardo alla matematica elementare che poi si va ad insegnare, davano anche poche informazioni sull'evoluzione storica del pensiero matematico, sull'epistemologia, la didattica concreta e la matematica. Molti colleghi non sanno usare un computer.
<Ciascuno si è costruito il proprio metodo didattico "sul campo".
<Un insegnante, pur avendo un'ottima preparazione nella disciplina, non riesce nella sua missione quando non ha metodo nel trasmettere la disciplina ai propri alunni. L'insuccesso di un alunno dipende anche dall'insegnante e dai suoi metodi didattici.
<Credo che sia i metodi che gli argomenti siano molto distanti sia dalla vita reale che dagli interessi degli alunni, che non trovano alcuna rispondenza fra quanto viene loro insegnato a scuola e le situazioni che si trovano ad affrontare nel concreto.
<Occorre una preparazione più specifica sulla didattica della matematica.
<Credo che i programmi universitari perdano di vista i problemi legati all'insegnamento.
<A causa della formazione scolastica ed universitaria. Pochi cercano di formarsi un curriculum di competenze didattiche, perché costa tempo e denaro.
<Hanno una eccellente preparazione universitaria ma non una adeguata preparazione didattica
<In parte purtroppo si, la settorializzazione sempre più spinta dello studio ha portato ad avere grandi eccellenze in ristretti campi, ma pochi insegnanti (persone capaci di insegnare anche a legare tra loro le varie discipline).
<La didattica per essere efficace deve essere accompagnata da un'esperienza personale di applicazioni, e ciò, nel campo della matematica, è molto raro; in ogni caso lo Stato dovrebbe favorire l'adeguamento ai nuovi sviluppi degli insegnanti che invece spesso si appoggiano esclusivamente ai libri di testo.
<Però dovrebbero curare più l'aspetto socio–affettivo dell'insegnamento-apprendimento.
<Secondo me la preparazione di base dovrebbe essere supportata e integrata con percorsi di matematica pragmatico-applicabile, visibile e del quotidiano.
< La laurea triennale ha rovinato ancor più una preparazione didatticamente valida. Prima si davano gli strumenti per potersi preparare adeguatamente anche da soli allorché la materia da insegnare non si era studiata all'Università.
<I metodi e i contenuti dell'istruzione universitaria non sono calibrati per la preparazione professionale.

<Molti non hanno stima per il proprio lavoro e non tendono a migliorarsi; comunque ritengo in generale che occorra approfondire maggiormente le questioni di base e i fondamenti.

<Più che altro manca l'individuazione dei nucleo fondamentali, se si fa matematica in modo attivo e partecipativo, a mio parere gli argomenti delle indicazioni (come delle precedenti e di tutti i programmi che ho visto) sono troppi. A cosa rinunciare? A cosa dedicare più tempo? Altro problema la personalizzazione dell'insegnamento da fare con la classe tutta intera, io ho delle difficoltà.

<La maggior parte, ma non tutti.

<Bisogna approfondire la competenza in didattica della matematica.

<Ritengo che l'università prepara molto bene, ma forse in modo non sufficientemente idoneo all'insegnamento. A mio avviso bisognerebbe inserire in modo obbligatorio, per chi si vuole dedicare all'insegnamento, materie come *Didattica-Pedagogia* e *Matematica Elementare*, ampiamente sviluppate. Infatti molti argomenti di matematica che si studiano nelle scuole secondarie non vengono più adeguatamente trattati all'università. Inoltre non considero educativo vietare la consultazione dei testi durante le prove. Ritengo inoltre che sarebbe opportuno, almeno per alcuni argomenti, assegnare prima la lezione da studiare, poi spiegarla. Ciò avrebbe due vantaggi: imparare a studiare sui libri e trarre maggiore profitto dalla spiegazione.

<Non sempre. Non esiste una valida selezione a livello di insegnanti. Tipicamente vengono pagati tra l'altro abbastanza poco per cui intraprendono questa strada solo coloro che non riescono a trovare altri sbocchi o coloro che hanno una innata passione. Manca poi a certi livelli la coscienza di aggiornarsi. E quali sono i controlli a livello universitario? I nuclei di valutazione degli studenti in cui compaiono i giudizi degli studenti rimangono quasi sempre (sempre) lettera morta, visto che tornano in mano solo ai rispettivi docenti.

<Non solo gli insegnanti, spesso, non sono adeguatamente preparati ad insegnare, ma anche la loro preparazione di base specifica della materia è carente (vedi lauree triennali; entrata in cattedra di insegnanti senza concorso, ma solo per anzianità; insegnanti di altre materie "limitrofe" che insegnano matematica). Alcuni insegnanti, talvolta, si limitano a "riportare" le lezioni e i metodi di soluzione, aiutando a diffondere e rafforzare l'idea comune, della matematica come "mero" strumentario per fare "calcoli" confermando la percezione comune di una disciplina sterile e fredda. Tutto ciò è tanto più grave, in quanto si innesta in una situazione italiana, in cui chi si occupa di "scienza" e matematica in particolare, è sempre stato visto come uno studioso di serie B rispetto agli "umanisti".

<E’ difficile dare una risposta globale, ci sono insegnanti molto preparati e motivati, altri che lo sono meno. Non so dare percentuali, certo che in questi casi sarebbe opportuno puntare comunque al meglio.
<Soprattutto dal punto di vista “elementare” e metodologico.
<Difficile da dirsi. Forse non è la preparazione, ma la dedizione che manca.
<A volte arrivano persone senza preparazione.

4) I libri di testo sono adatti ad un insegnamento della matematica moderna? *(Con questa domanda si vogliono fra l’altro evidenziare alcune critiche ad alcuni testi).*
<No in senso generale, gli allievi fanno poco uso dei libri di testo; in particolare il testo di matematica viene utilizzato, se ciò accade, solo nella parte relativa agli esercizi.
<Sono dei mattoni di 900 pagine che non hanno alcuna capacità di competere con l’accesso veloce attraverso internet. Penso che oggi si devono proporre testi più sintetici (una linea di mezzo tra appunti e gli attuali “mattoni”).
<Dovrebbero contenere una parte più specifica e pratica circa “la matematica e l’informatica” e ne dovrebbero evidenziare di più l’utilità pratica.
<I libri strutturati decentemente sono davvero pochi, più di una volta mi è capitato di trovare errori nei testi.
<No, sono decisamente a misura dell’insegnante!!!!
<Sono adeguati alle indicazioni ministeriali.
<Non esiste la matematica moderna. Qualunque ampliamento della conoscenza si edifica su precedenti concetti e nozioni di base che gli alunni hanno assimilato e fatto propri. I libri devono essere scritti i maniera chiara come quelli di 40 anni fa anche se affrontano la matematica applicata all’informatica o altro.
<Sono adatti alla mediocre preparazione didattica della maggior parte degli insegnanti.
< Sfogliando i libri che sono adottati nelle scuole si notano molte lacune. Non vengono trattati argomenti base importantissimi, a favore di argomenti che possono essere appresi in via autonoma dallo studente.
<C’è una carenza rispetto ai problemi applicativi ed in particolare manca un’attenzione rispetto alle competenze trasversali (ad es. matematica-fisica, matematica-discipline tecniche); gli esercizi sono avulsi da ogni contesto reale ed inutilmente complicati.
<Più che il libro di testo penso che debba essere l’insegnante a trasmettere l’idea che la matematica non sia solo un “far di conto”. Il testo lo può aiutare in questo. Condivido l’idea di non complicare l’aspetto computazionale dei

problemi e di insistere di più sull'aspetto critico, sul saper giustificare i passaggi fatti.
<Alcuni si. In generale dovrebbero essere più ricchi di applicazioni pratico quotidiane.
<E' però la loro scelta che non sempre è conseguente. Il docente tende ad insegnare non sempre quello che ha appreso all'Università (talvolta troppo staccato dai programmi) quanto quello che lui stesso studiava nella scuola media (di 1° e 2° grado).
<Sono troppo semplicistici e totalmente privi di nozioni di storia della matematica.
<I testi non sono coerenti con i metodi e i contenuti indicati dalla maggioranza dei risultati della ricerca didattica a livello internazionale.
<Sono d'accordo con la seconda parte, penso che avere il risultato sia utile (specialmente nella scuola superiore) anche se naturalmente non basta.
<Credo che i libri siano inadeguati sulla parte operativa del fare.
<Spesso gli esercizi proposti prevedono strategie non presentate nella parte teorica il che potrebbe andare anche bene come ricerca di soluzioni, ma poi serve comunque una verifica e una spiegazione, magari a posteriori.
<Mi piacerebbe che nei libri di testo, per ogni argomento, vi sia un supplemento di approfondimento – facoltativo - dei temi trattati, in modo da stimolare i più volenterosi. Sarebbe molto utile che la parte riservata agli esercizi ed ai problemi contenga almeno uno svolgimento dettagliato e commentato in modo da indicare un esempio da imitare. Non trovo didatticamente corretto indicare il risultato a fianco di ogni problema. L'allievo deve responsabilizzarsi del risultato ottenuto, così come nella futura professione, qualunque attività intraprenderà non potrà avere il vantaggio di confrontare quanto elaborato con il giusto risultato. Ritengo utile che vengano inseriti per ogni argomento riferimenti appropriati di storia ed evoluzione della matematica.
<Gli esercizi dovrebbero anche alle volte includere meno dati di quelli necessari o più dati ridondanti rispetto a quelli necessari, o addirittura in contraddizione tra loro per abituare lo studente a essere critico. Sarebbe utile per gli argomenti sapere un minimo su chi ha fatto una certa scoperta e come. Collocarla nel momento storico in cui è avvenuta.
<In genere spiegano "come" fare e non "perché" si fa così, aiutando ad ingenerare l'idea della matematica come solo algoritmo.
<Ci sono ottimi testi. Comunque un buon insegnante sopperisce a qualsiasi testo. D'accordo sull'inutilità di esercizi tortuosi. Le risposte danno un senso di sicurezza all'alunno, ma vanno consultate dopo. Ci sono testi che danno le risposte solo della metà degli esercizi.

5) Le indicazioni ministeriali sono conformi alle nuove esigenze?
<I programmi ministeriali contengono troppo, sarebbe forse più importante fare meno e meglio, insegnare soprattutto un metodo e non una quantità di cose.
<E' un "si" improprio perché nessuno si pone il problema di valutare correttamente le indicazioni ministeriali che propongono "Trasformazioni geometriche e cenni di geometria proiettiva", Statistica e probabilità, numeri complessi,…" che i docenti non affrontano nei loro percorsi.
<Difficilmente applicabili, ogni insegnante le interpreta in modo personale.
<Penso che le esigenze di oggi siano quelle di scoprire l'utilità pratica di ogni disciplina.
<Solo ultimamente.
<In linea di massima lo sono (l'uso di software per la didattica tipo *Cabrì Geometre* è ormai diffuso), ma si può fare sicuramente meglio.
<Secondo me sono un buon passo in avanti, ma poco attuato!!!!
<Sicuramente no, perché altrimenti gli autori e gli editori dei libri di testo offrirebbero un prodotto migliore.
<Si negli ultimi 5 anni.
<Le colpe del M. P. I. sono dovute al fatto che non c'è nelle indicazioni ministeriali una certa continuità.
<Dovrebbero essere destinate più ore all'insegnamento della matematica e della fisica.
<L'uso del calcolatore nell'apprendimento è ormai strumento indispensabile, ma l'immaginazione e l'intuizione devono essere stimolati in modo ancora più forte.
<Nelle materie tecniche e scientifiche è necessario possedere sin da subito competenze di base sulle funzioni, equazioni e sull'analisi infinitesimale che invece vengono proposte solo agli ultimi anni della scuola superiore e quindi non contemporaneamente ma successivamente alle reali necessità di comprensione degli argomenti; strumenti fondamentali come i fogli elettronici di calcolo non sono presenti nei programmi ministeriali.
<C'è ancora meno spazio per la matematica e la fisica.
<Anche se lo fossero, mancano i controlli. E anche se ci fossero i controlli (ma non ci sono) mancherebbe un qualsiasi provvedimento conseguente.
<Troppi "progetti", poche nozioni.
<Ma senza enfatizzare troppo l'uso del computer. Riteniamo che la matematica elementare non debba dimenticare la carta e la penna
<Stranamente le indicazioni ministeriali sono più aggiornate ma non vengono supportate da interventi indispensabili affinché risultino incisive nella realtà scolastica.

<Troppa burocrazia e populismo, ma niente cultura; le nuove tecnologie devono essere al servizio dei discenti ma non sostituire la loro creatività. e il loro impegno.
<Ritengo le nuove indicazioni migliori delle precedenti, in quanto riportano argomenti e spunti più interessanti, e fanno capire che sta all'insegnante utilizzarne quello che interessa e modificarle.
<Quelle rinnovate. Certo i programmi della scuola secondaria superiore sono sicuramente da rivedere.
<Credo che alcuni contenuti previsti dai programmi ministeriali andrebbero rivisti: darei più spazio alla geometrie non euclidee, al calcolo combinatorio, statistica ed anche alla storia della matematica e aumenterei le ore settimanali per poter lavorare di più in classe con esercitazioni di recupero e approfondimento in itinere e non a fine quadrimestre.
<Occorre certamente tenere conto dello sviluppo tecnologico, (computer e software specifico per la matematica) con l'accortezza di presentare tali aspetti come "strumenti" e non come il fine.
<Fornire le indicazioni non implica fornire gli strumenti per realizzarle.
<Credo che l'insegnamento della Matematica vada profondamente ripensato. Mi pare che le indicazioni ministeriali non siano univoche e precise.
<Sono alquanto obsolete.
<Il computer è un mezzo, ma non è su di esso che vanno tagliati i programmi scolastici. Piuttosto iniziative come "Matematica e Medioevo" sono sicuramente lodevoli. Un buon insegnante sa adattare qualunque programma ministeriale (anche obsoleto) alle nuove esigenze.
<Ci vogliono più ore di lezione in classe per poter attuare tutto, sono troppe le ore perse per attività diverse.

6) Conosci le motivazioni storiche della Società Mathesis?

Il Questionario è stato inviato direttamente o indirettamente a tutti i Soci Mathesis ed inoltre ad Amici e Conoscenti. Questi ultimi hanno aderito all'iniziativa ma non conoscevano la Mathesis. I Soci ovviamente conoscevano tutti le motivazioni storiche della Società, ma pochi hanno aderito con una risposta. Le risposte pervenute, anche se poche, riescono tuttavia a dare un quadro della situazione molto interessante e pieno di aspettative che mi auguro non vadano deluse.

7) La Società Mathesis deve esprimersi nelle formulazioni delle nuove indicazioni e riforme della Scuola?

<Si, ma deve anche proporre idee e correttivi diversi.
<È uno dei soggetti giuridici più qualificati a farlo.

<Essendo costituita da professionisti può dare indicazioni basate sull'esperienza diretta.
<Credo che la Mathesis, nata proprio con l'obiettivo di migliorare l'aspetto didattico della scuola secondaria, abbia ben chiaro l'aspetto pratico della didattica e per questo può portare un giusto equilibrio nella formulazione di indicazioni e riforme scolastiche.
<Sicuramente si, avendone anche le competenze.
<Immagino abbia abbastanza potere!
<Se la Società è in grado di recepire disagi e di risolvere problemi, allora sì.
<Prima e non dopo.
<Occorre che i presidenti che si sono succeduti nella direzione della Mathesis Nazionale collaborino più fattivamente nella formulazione dei programmi e nelle riforme della scuola facendosi protagonisti nell'ambito del M. P. I.
<Credo che l'iniziativa sia sempre da premiare rispetto alla passività.
<Il contributo innovativo di esterni al mondo della scuola deve essere inteso sempre positivamente: spesso le riforme della scuola vengono decise da persone interne al Ministero che non hanno alcuna esperienza didattica e professionale: emblematico è il caso degli ispettori didattici che di solito sono ex insegnanti che non hanno avuto alcun interesse e quindi successo dell'insegnamento, e che preparano temi d'esame di stato pieni di errori anche concettuali.
<Se però la società riscuotesse un notevole consenso da parte dei docenti di matematica e i soci potessero esprimere il loro parere su tali formulazioni e indicazioni.
<Sarebbe più vicina alle novità normative operative scolastiche soprattutto per i percorsi rivolti agli insegnanti.
<Penso che persone aggregate intorno a problemi dell'insegnamento/apprendimento della matematica possano e debbano esprimersi nei momenti e nelle sedi opportune.
<Restituendo la scuola ai docenti preparati e volonterosi.
<Credo che sarebbe utile ma dovrebbero esserci docenti che insegnano nei diversi ordini, per due motivi: ormai penso che solo chi insegna in una scuola può dare giudizi su quella scuola; solo se si è di tutti gli ordini si può fare un serio lavoro di ricerca dei nuclei fondamentali e di come trattarli nei diversi ordini.
<Secondo me, le indicazioni e le riforme spesso cambiano, bisogna piuttosto esprimersi con l'obiettivo di migliorare l'insegnamento e l'apprendimento promuovendo la comunicazione tra chi opera nella scuola e la ricerca.

<Penso sia stata fondata proprio per questo scopo. Dovrebbe avere quanto meno parere consultivo.
<Anche se dubito che il Ministero ne tenga molto conto.

8) Osservazioni varie a completamento delle risposte date
<Gli studenti italiani hanno programmi ministeriali e testi di matematica troppo difficili, inoltre non sono abituati ai tests di valutazione impiegati per le comparazioni “oggettive” con studenti di altri Paesi.
<Si potrebbe pensare ad un lavoro di studio di cosa si può fare e cambiare, introducendo delle esperienze a livello didattico ?
<Credo che comunque lo scoglio più duro per quanto riguarda la matematica rimane il fatto che il suo apprendimento va fatto, gradualmente, a piccoli passi, ma con continuità. Oggi i giovani sono abituati ad avere tutto e subito e col minimo sforzo e, anche perché docenti anche di altre discipline lo permettono, pensano che sia sufficiente studiare un mese all’anno (l’ultimo) per “prendersi la materia”. Questo è il problema più grosso, lo studio non è finalizzato all’apprendimento, ma alla conquista di un voto e di “un pezzo di carta”(il diploma). D’altra parte la faccenda dei recuperi è già da troppi anni che sta dando il messaggio : “ anche se non si è studiato per un anno bastano 10-15 ore per recuperare “…perché studiare di più e per tutto un anno ?
<Insegno da circa 15 anni al Liceo Scientifico, dove a parere comune la matematica “dovrebbe farla da padrone”. In realtà le ore di matematica, fisica e scienze sono veramente poche (triennio: 3 di matematica e 4 di latino per ciascun anno), di questo non si parla per niente sui giornali! Fa più notizia scrivere “Italiani ignoranti in matematica”. Ai tempi del mio anno di formazione si parlava di una riforma, ma una riforma seria non è mai stata fatta. Ogni volta “solo” iniziative di propaganda politica sulla pelle degli insegnanti e degli studenti. Quando si insegna in un corso in cui si fa più matematica e fisica (il famoso PNI), qualche differenza si vede!!
<Questo questionario deve essere un punto di partenza per una discussione più ampia; precisamente, ritengo che i risultati di questo lavoro vadano analizzati in un convegno o seminario da organizzare opportunamente.
<Anche un’ossessiva insistenza sul recupero e il sostegno risulta essere diseducativa e scoraggia l’autonomia. Il nuovo sistema di recupero dei debiti rischia di portare pochi vantaggi e molte complicazioni.
<La scuola dell’obbligo abitua i ragazzi ad avere la promozione alla classe successiva anche senza aver raggiunto la preparazione minima richiesta. <Troppo spesso gli alunni che si impegnano non sono adeguatamente valorizzati. Le famiglie sovente giustificano gli insuccessi scolastici, spe-

cialmente in matematica, con motivazioni varie senza spingere l'alunno all'impegno.
<Credo sia molto importante sentire il parere di chi nella scuola secondaria e primaria lavora. L'insegnamento universitario della matematica è molto distante sia dalla scuola che dalle nuove indicazioni ministeriali e quindi non è di aiuto agli insegnanti della scuola per far superare agli alunni le difficoltà nella matematica, difficoltà che spesso nascono nella scuola media perché alle elementari i bambini ancora riescono a vivere la matematica come un momento di apprendimento divertente. Ancora più importante e poter condividere queste problematiche con altri colleghi in modo da provare ad individuare nuove strategie per "catturare" l'interesse degli allievi.
<Ritengo che in particolare nel primo biennio della scuola secondaria superiore sia importante dare più spazio alla geometria, in modo da sviluppare le capacità argomentative e deduttive dei ragazzi.
<Gli insegnanti hanno un approccio positivo con gli alunni? I professori universitari dovrebbero suggerire e insegnare. Essere professori non costituisce un punto di arrivo ma solo un punto di partenza.
<Il socio Mathesis ha il coraggio di esprimere opinioni? E' attualmente impegnato in iniziative finalizzate all'apprendimento ? E' disponibile a non raggiungere interessi personali?
<Occorre che tutte le sezioni Mathesis sviluppino seminari su questo argomento.
<In generale, manca nello studio della matematica l'illustrazione del perché dei tanti problemi. Credo che in realtà manchi una cultura matematica, o meglio che si sia persa, si è dimenticato dello stretto legame tra matematica e filosofia ad esempio, si pensa alla matematica come mero strumento, e non come forma mentis.
<I programmi del Liceo Scientifico P.N.I., anche se molto interessanti e stimolanti, sono troppo ampi: non si riesce ad approfondire le varie tematiche o si rischia "l'effetto forbice", per cui i bravi diventano sempre più bravi e i "somari" sempre più "somari". Personalmente sarei favorevole ad una scelta di indirizzo all'inizio del triennio, per esempio: Logico-Informatico oppure Statistico-Probabilistico – oppure Analitico-Geometrico.
<Sono insegnante in pensione da tempo, attualmente mi occupo della storia dell'insegnamento della matematica nella seconda metà del secolo scorso, gli anni in cui ero docente in servizio. Su questo periodo credo vi sia un gran numero di cose che gli insegnanti attuali non hanno vissuto o non conoscono.
<Sono molto contenta dei Vostri input che permettono di arricchire e confrontare, aggiornare i nostri percorsi didattici.

<C’è assoluto bisogno di una strategia “meritocratica” sia per chi insegna e sia per chi apprende.
<Si è persa l’importanza dell’insegnamento della geometria razionale e della logica. Sarebbe anche utile dare più spazio alla filosofia della scienza.
<Per quanto riguarda la mia piccola esperienza didattica posso affermare che non noto tanta crisi nella materia. Vi è sicuramente una percentuale di studenti che non la digeriscono molto ma spesso il deficit riguarda anche altre materie. La percentuale di coloro che non la amano ed hanno di conseguenza un blocco di fronte ad essa è comunque molto basso e dipende molto dall'approccio iniziale che l'insegnante dà alla materia.
<Bisogna tornare a una Scuola seria sotto tutti i punti di vista, con docenti motivati e qualificati, anche da un punto di vista normativo e economico.
<Quali azioni bisogna intraprendere per far sì che l’attività di divulgazione svolta dalla Mathesis possa raggiungere e coinvolgere un maggior numero di insegnanti? Dare vita a incontri e seminari che siano pubblicizzati presso le istituzioni scolastiche e che possano essere riconosciuti a livello ministeriale come attività di aggiornamento e che, quindi, comportino la dispensa dall’insegnamento.
<È necessario aumentare le ore settimanali per l’insegnamento della matematica soprattutto nei licei scientifici?
<Se si vuole che gli studenti migliorino, lo Stato deve agire in modo forte sulla televisione, proponendo modelli meno squalificati e meno squalificanti.
<Gli allievi si stanno abituando al fatto che basta saper poco e fare pochi errori per essere promossi. Nella professione, qualunque essa sia, non è consentito commettere nessun errore. Ciò va imparato sui banchi di scuola.
<Credo che dalle mie risposte appaia evidente la mia convinzione sulla centralità dell’insegnante. Quando si instaura un buon feeling docente-discente il resto viene da sé. Gli alunni “sentono” l’impegno del docente e sono disposti a mettersi nelle sue mani e lasciarsi guidare. Ogni buon insegnante deve riuscire a far comprendere che dietro e al di là di quello che studia al liceo c’è tanto altro. L’aggancio con problemi reali (vedi il congresso Mathesis di novembre 04) è importantissimo.

Alcune riflessioni

Le risposte riferite, anche se da un campione limitato, si prestano a varie considerazioni. Ovviamente ognuna meriterebbe un approfondimento, ma deduciamo alcune considerazioni di carattere generale.

1) Le risposte risentono probabilmente dell’età degli intervistati: i più giovani sono d’accordo che i ragazzi non debbano applicarsi soltanto allo

studio, ma dedicarsi ad altre attività che ne favoriscono la crescita culturale; i meno giovani vedono nell'impegno in spazi extra-scolastici una occasione non di crescita, ma di distrazione.

2) Le risposte a questo quesito sono le più varie addebitando i deludenti risultati a varie cause:
- I quesiti posti per la loro valutazione sono al di fuori dei nostri programmi ufficiali.
- Non vi è più sufficiente rigore nel giudicare.
- Si è promossi anche se non sufficientemente preparati e ciò induce l'allievo anche a pensare che pure nel lavoro non sarà necessario troppo impegnarsi.

3) Si ritiene che manchi nella maggior parte dei docenti una metodologia adeguata ad un efficace insegnamento e si dà grande responsabilità alla riforma degli esami di stato ed all'introduzione della laurea 3 + 2.

4) Le risposte date a questo quesito inducono ad auspicare che venga introdotto da parte del Ministero un controllo e conseguente benestare ai libri in uso nelle scuole. Inoltre i docenti dovrebbero aiutare gli allievi a servirsi correttamente dei testi e non servirsene soltanto per copiare le tracce dei problemi e degli esercizi.

5) Le riflessioni sulle risposte ricevute a questo quesito sono essenzialmente le risposte date dagli interpellati.

6) e 7) La Mathesis dovrebbe avere la forza di rioccupare la funzione che ha avuto negli anni passati, cioè essere promotrice e garante delle basi dell'insegnamento della matematica.

Indice

editrice
rotas
BARLETTA
www.editricerotas.it
dicembre 2008